LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM

CALCUL SIMULTANÉ DE LA POLARISABILITÉ ET DE L'ÉNERGIE DE TRANSITION ÉLECTRONIQUE DES MOLÉCULES. CAS PARTICULIER DE L'ÉTHYLÈNE ET DU BENZÈNE

Par J. BARRIOL et J. RÉGNIER,
Faculté des Sciences de Nancy.

Sommaire. — Selon la méthode exposée dans la première partie, l'incrément de polarisabilité de la double liaison éthylénique est calculé à l'aide de MO simples. Le résultat moins bon que celui déjà obtenu à partir d'une fonction d'onde plus élaborée, peut toutefois être utilement comparé à l'incrément dû aux doubles liaisons du cycle benzénique. On montre ainsi que l'incrément du cycle benzénique (qui vaut trois fois l'incrément de double liaison éthylénique) est dû aux seules doubles liaisons.

Dans un second paragraphe l'identification de deux valeurs de la polarisabilité longitudinale, obtenues de façon différente, permet d'arriver à une évaluation de la longueur d'onde de la transition parallèle dans C_2H_4. La formule, qui rappelle celle obtenue à partir du modèle métallique, est toutefois en bien meilleur accord avec les faits.

Deuxième Partie : Comparaison des incréments de réfractivité de la double liaison éthylénique et du cycle benzénique (1).

La méthode générale donnée dans la première partie sera encore employée ici, la seule différence étant le choix de la fonction d'onde ψ_0 représentant l'état fondamental. Pour la simplicité des calculs, on prendra pour le benzène la MO antisymétrisée sans faire intervenir les formes ioniques, ou ce qui revient au même, sans tenir compte des interactions de configurations. Ceci exige alors que la fonction d'onde de l'état fondamental de C_2H_4 soit une MO simple sans correction d'état ionique.

Éthylène. — Les notations sont les mêmes que dans la première partie, mais cette fois la distribution des électrons π est donnée dans l'état fondamental par

$$\psi_0 = \frac{[a(1)+b(1)][a(2)+b(2)]}{2(1+S)}.$$

Le calcul de la polarisabilité suivant Oy se ramène à celui de

$$K_y^2 = \int (y_1+y_2)^2 \psi_0^2 \, d\tau_1 \, d\tau_2.$$

Négligeant encore les intégrales du type

$$\int y^2 ab \, d\tau,$$

nous obtenons

$$K_y^2 = \frac{R^2 + 4C_y^2}{2(1+S)}.$$

ce qui conduit à l'aide de (5.1) à

$$\alpha_y = \frac{(R^2+4C_y^2)^2}{2(1+S)^2 a_0}. \tag{1}$$

De la même manière la polarisabilité suivant Ox s'évalue à partir de

$$K_x^2 = \frac{2C_x^2}{1+S}.$$

Pour l'axe Oz il s'introduit encore l'intégrale

$$\int z^2 ab \, d\tau$$

que l'on ne peut plus négliger mais que l'on ramène à

$$\zeta^2 \int ab \, d\tau = \zeta^2 S,$$

(1) Les renvois à la première partie seront désignés par la lettre I.

où S est l'intégrale de superposition et ζ la cote z donnant le chevauchement maximum. Ainsi

$$K_z^2 = \frac{2(C_z^2 + \zeta^2 S)}{1 + S}.$$

La polarisabilité moyenne

$$\overline{\alpha} = \frac{\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z}{3}$$

s'écrit alors

$$\overline{\alpha} = \frac{1}{6(1+S)^2 a_0}[(R^2 + 4C_y^2)^2 + 16C_x^4 + 16(C_z^2 + \zeta^2 S)^2],$$

les grandeurs C_x, C_y, C_z et ζ ayant les mêmes valeurs que dans I.

L'expression définitive de $\overline{\alpha}$

$$\overline{\alpha} = \frac{1}{6(1+S)^2 a_0}\left[\left(R^2 + 24\frac{a_0^2}{Z^2}\right)^2 + \left(24\frac{a_0^2}{Z^2}\right)^2 + \left(8\frac{a_0^2}{Z^2}(9+S) + 4\frac{a_0}{Z}R\right)^2\right]$$

conduit pour incrément de double liaison éthylénique

$$P = \frac{4\pi}{3}N\overline{\alpha}$$

à la valeur $P = 5,05$, nettement moins bonne que la valeur expérimentale 2,95.

Il est hors de doute que cette divergence doit être attribuée au fait que la fonction MO introduit une contribution trop grande des états ioniques. Ne tenant aucun compte de la corrélation électronique, elle fait que le champ appliqué accumule les électrons en bout de chaîne et explique ainsi la prédominance du terme α_y.

Benzène. — Avec les notations de la figure 1,

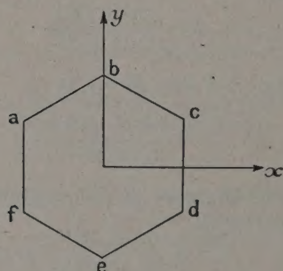


Fig. 1.

la distribution des électrons π dans l'état fondamental s'obtiendra à partir des MO occupées

$$\Phi_A = A(a+b+c+d+e+f),$$
$$\Phi_B = B(a+2b+c-d-2e-f),$$
$$\Phi_C = C(a-c-d+f).$$

en construisant la fonction d'onde antisymétrique

$$\Theta = \frac{1}{\sqrt{6!}}\mathcal{A}\,\Phi_A(1)\alpha(1)\Phi_A(2)\beta(2)\ldots\Phi_C(5)\alpha(5)\Phi_C(6)\beta(6),$$

où A, B, C sont des constantes de normation et α et β les fonctions de spin.

Ceci posé, le calcul de la polarisabilité le long de l'axe Oy revient là encore à l'évaluation de

$$K_y^2 = \int (y_1 + y_2 + \ldots + y_6)^2 \Theta^2 \,d\tau_1 \ldots d\tau_6.$$

Une transformation classique permet d'écrire

$$K_y^2 = \int (y_1 + y_2 + \ldots + y_6)^2 \Phi_A(1)\alpha(1)\ldots \times \Phi_C(6)\beta(6)\mathcal{A}\,\Phi_A(1)\alpha(1)\ldots\Phi_C(6)\beta(6)\,d\tau_1\ldots d\tau_6.$$

Or les fonctions Φ_A, Φ_B et Φ_C étant orthogonales, l'expression de K_y^2 se simplifie et devient

$$K_y^2 = 2\left[\int y^2\Phi_A^2\,d\tau + \int y^2\Phi_B^2\,d\tau + \int y^2\Phi_C^2\,d\tau - 2\int y\Phi_A\Phi_B\,d\tau - 2\int y\Phi_A\Phi_C\,d\tau - 2\int y\Phi_B\Phi_C\,d\tau\right].$$

Chacune de ces intégrales s'effectue sans difficulté. Il vient ainsi

$$\int y^2\Phi_A^2\,d\tau = A^2\left[3R^2 + \frac{9R^2 S}{2} + 6C_y^2\right],$$

où

$$C_y^2 = \int y_a^2 a^2\,d\tau,$$

l'origine étant au centre de symétrie de la molécule.

La normation de Φ_A fournit

$$6A^2 = \frac{1}{1+2S},$$

d'où

$$\int y^2\Phi_A^2\,d\tau = \frac{R^2\left(1+\frac{3S}{2}\right) + 2C_y^2}{2(1+2S)}.$$

On montrerait de même que

$$\int y^2\Phi_B^2\,d\tau = \frac{3R^2}{4} + \frac{C_y^2}{1+S}$$

et que

$$\int y^2\Phi_C^2\,d\tau = \frac{R^2 + 4C_y^2}{4(1+S)}.$$

Enfin les termes rectangles donnent :

$$\int y\,\Phi_A\Phi_B\,d\tau = \frac{R^2(2+3S)^2}{4(1+2S)(1+S)},$$

$$\int y\,\Phi_A\Phi_C\,d\tau = \int y\,\Phi_B\Phi_C\,d\tau = 0,$$

de sorte que

$$K_y^2 = \frac{R^2}{1+S} + 2C_y^2\left(\frac{1}{1+2S} + \frac{2}{1+S}\right).$$

Par raison de symétrie on a d'ailleurs :

$$K_x^2 = K_y^2.$$

Il reste donc à évaluer :

$$K_z^2 = \int (z_1 + \ldots + z_6)^2\,\Phi_A(1)\alpha(1)\ldots \times \Phi_C(6)\beta(6)\mathcal{A}\,\Phi_A(1)\alpha(1)\ldots\Phi_C(6)\beta(6)\,d\tau_1\ldots d\tau_6$$

qui se trouve être égal à

$$2\left[\int z^2\Phi_A^2\,d\tau + \int z^2\Phi_B^2\,d\tau + \int z^2\Phi_C^2\,d\tau - 2\int z\,\Phi_A\Phi_B\,d\tau - 2\int z\,\Phi_A\Phi_C\,d\tau - 2\int z\,\Phi_B\Phi_C\,d\tau\right].$$

On trouve facilement

$$\int z^2\Phi_A^2\,d\tau = \frac{C_z^2 + 2\zeta^2 S}{1+2S},$$

$$\int z^2\Phi_B^2\,d\tau = \frac{C_z^2 + \zeta^2 S}{1+S},$$

$$\int z^2\Phi_C^2\,d\tau = \frac{C_z^2 + \zeta^2 S}{1+S},$$

le terme C_z^2 représente l'intégrale

$$\int z^2 a^2\,d\tau$$

et

$$\zeta^2 S = \int z^2\,a\,b\,d\tau = \zeta^2 \int a\,b\,d\tau,$$

ζ étant la valeur de z donnant le maximum de ab. De plus

$$\int z\,\Phi_A\Phi_B\,d\tau = \int z\,\Phi_A\Phi_C\,d\tau = \int z\,\Phi_B\Phi_C\,d\tau = 0.$$

Ainsi

$$K_z^2 = 2\left(\frac{C_z^2 + 2\zeta^2 S}{1+2S} + 2\,\frac{C_z^2+\zeta^2 S}{1+S}\right).$$

Écrivant alors que la polarisabilité moyenne

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z}{3} = \frac{2\alpha_x + \alpha_z}{3}$$

est donnée par

$$\bar{\alpha} = \frac{8\pi^2 me^2}{9h^2}(2K_x^4 + K_z^4),$$

$$= \frac{2}{9a_0}(2K_x^4 + K_z^4),$$

il vient pour incrément de réfractivité molaire du cycle benzénique

$$P = \frac{4\pi}{3}N\bar{\alpha} = 16,5$$

en prenant $R = 1,39$ Å, $Z = 3,43$ et $S = 0,232$. Or, la réfractivité moléculaire du cycle benzénique est, expérimentalement, égale à trois fois la réfractivité de la double liaison éthylénique. Le rapport des incréments calculés ici est de 3,25. Cependant, étant donné la grande sensibilité de α à la valeur de la charge d'écran, et la variation de la réfractivité des électrons σ avec la distance internucléaire (les tables de Landolt donnent [2] $(C_{ar.}—C_{aro})—(C_{ali}—C_{ali})=0,43$ pour $\bar{\alpha}$), l'accord peut être considéré comme satisfaisant.

On peut d'ailleurs remarquer qu'en introduisant dans la fonction d'onde du benzène les interactions de configurations, l'importance des termes α_x et α_y diminuerait beaucoup. Il est à penser que l'on retrouverait trois fois la valeur 2,81 calculée dans le cas de C_2H_4, mais ce serait au prix d'une complication énorme des calculs.

Calcul approché de l'énergie de transition électronique dans l'éthylène. — Reprenons pour C_2H_4 la MO liante

$$\psi_0(1) = \frac{a(1)+b(1)}{\sqrt{2(1+S)}}$$

et rappelons que pour le calcul de α_y nous avons introduit une fonction ψ_2 telle que

$$K_y\psi_2 = y\psi_0.$$

Or on peut montrer que le produit scalaire

$$\left(\frac{y\psi_0(1)}{K_y}, \frac{a(1)-b(1)}{\sqrt{2(1-S)}}\right)$$

est très sensiblement égal à 1. Ceci suggère le calcul de α_y, donné par

$$\alpha_y = \frac{2e^2\left(\int \psi_2 y\psi_0\,d\tau\right)^2}{E_2 - E_0}$$

en prenant pour ψ_0 et ψ_2 les MO liante et antiliante respectivement. On trouve

$$\alpha_y = \frac{e^2R^2}{(E_2-E_0)(1-S^2)}. \qquad (2)$$

Admettant alors que, par suite de l'insensibilité de α au choix de la fonction d'onde, les valeurs de α_γ données par (1.II) et (2.II) coïncident, il vient :

$$E_2 - E_0 = \frac{h^2}{2\pi^2 m R^2}\left(\frac{R^2}{R^2 + 4C_\gamma^2}\right)^2 \frac{1+S}{1-S}.$$

On notera l'analogie de cette formule avec celle obtenue à partir du modèle métallique. La longueur d'onde calculée

$$\lambda = \frac{hc}{E_2 - E_0} = 1560 \text{ Å}$$

correspond approximativement à celle de la transition parallèle dans l'éthylène [3], cette approximation étant d'ailleurs meilleure dans le cas des chaînes courtes que celle donnée par le modèle de l'électron libre.

Manuscrit reçu le 9 février 1955.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Barriol J. et Régnier J. — *J. Physique Rad.*, 1954, **15**, 528.
[2] Landolt-Bornstein. — 6 Auflage, I Band, 3 Teil, p. 513.
[3] Pryce W. C. et Tuttle W. T. — *Proc. Roy. Soc.*, 1940, A **174**, 207.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM. TOME 16, AOUT-SEPTEMBRE 1955, PAGE 644.

TRANSITIONS DIPÔLAIRES ET QUADRUPÔLAIRES DE CERTAINS ÉLÉMENTS ($Z = 83, 82, 78, 74$). CALCUL DES LARGEURS RADIATIVES ET DES INTENSITÉS RELATIVES DES RAIES X CORRESPONDANTES

Par Williams LASKAR,
Institut du Radium, Laboratoire Curie.

Sommaire. — Cet article a pour objet le calcul relativiste des probabilités de 22 transitions pour chacun des quatre éléments suivants : ^{83}Bi, ^{82}Pb, ^{78}Pt et ^{74}W. Le tableau des résultats et de ceux obtenus en 1936 par le Professeur H. S. W. Massey et le Docteur E. H. S. Burhop pour ^{92}U, ^{79}Au et ^{51}Sb sont résumés dans les courbes correspondantes. Discussion et interprétation des résultats.

Le présent article constitue une suite au travail que H. S. W. Massey et E. H. S. Burhop ont publié il y a 19 ans au sujet de ^{92}U, ^{79}Au et ^{51}Sb, et qui a été pour moi un guide extrêmement précieux; dans ce qui suit, ces éléments sont placés dans un cadre pour rappeler que les valeurs correspondantes sont les résultats de leurs calculs.

Rappelons que l'intensité avec laquelle est émise une radiation de fréquence ν correspondant à une transition dipôlaire électrique entre deux niveaux initial et final i et f est donnée par la formule classique

$$I(E_1) = \frac{64\pi^4\nu^4}{3c^3}\left|\int r\rho_{fi}\,\mathrm{d}\tau\right|^2,$$

où ρ_{fi} est la densité de charge associée à la transition et s'écrit à l'aide des fonctions d'ondes relativistes à quatre composantes

$$\rho_{fi} = -e(\psi_f^*\psi_i).$$

Si $I(E_1) = 0$, une radiation dipôlaire magnétique ou quadrupôlaire électrique peut alors être émise avec l'intensité

$$I = \frac{16\pi^4\nu^4}{c^5}\sum_m\left\{\left|\int z(j_{fi}^x + i j_{fi}^y)\,\mathrm{d}\tau\right|^2 + \left|\int z(j_{fi}^x - i j_{fi}^y)\,\mathrm{d}\tau\right|^2\right\},$$

par unité d'angle solide et dans la direction OZ [où les composantes j_{fi}^x et j_{fi}^y de la densité de courant associée à la transition sont données par l'expression

$$\vec{j}_{fi} = e(\psi_f^*\rho_1\vec{\sigma}\,\psi_i),$$

ρ_1 et $\vec{\sigma}$ étant les matrices employées habituellement dans la théorie de Dirac, ψ_f et ψ_i les fonctions d'ondes des niveaux f et i].

En unités Hartree, $P = \Delta E$, et il suffit d'un simple changement d'unités pour exprimer les largeurs radiatives en électrons-volts.

Enfin, entre l'intensité I liée à l'énergie émise et la probabilité de transition correspondante P, liée au nombre de photons émis, on a la relation

$$I = Ph\nu.$$

Les fréquences caractéristiques des raies X sont celles publiées par Mlle Y. Cauchois [2], ou déduites des données du même auteur. Remarquons à ce propos que certains écarts avec les résultats de ^{79}Au peuvent s'expliquer par le fait qu'une petite variation $\Delta\nu$ sur le choix de ν entraîne une variation de $3\,\Delta\nu$ sur les largeurs et de $4\,\Delta\nu$ au moins sur les intensités relatives.

Le calcul des éléments de matrices est fait suivant les mêmes données qu'en 1936; les fonctions d'ondes utilisées sont, à un facteur de normalisation près, les fonctions hydrogénoïdes données par C. G. Darwin [3] et la charge effective du noyau pour les différents niveaux est calculée suivant les règles de Slater [4].

En vue de la détermination des coefficients de fluorescence par une méthode semi-directe [5], les calculs des probabilités de transitions et celui des largeurs ont été faits avec une précision en rapport avec celle des mesures de largeurs de raies X obtenues par la méthode du cristal courbé de Mlle Y. Cauchois; nous avons utilisé une machine à calculer et la table de logarithmes à sept décimales du Service Géographique de l'Armée.

Le calcul des intensités relatives en a été déduit par des opérations faites à la règle à calcul.

Enfin les 82 et 83 d'une part, 78 et [79] d'autre part, sont assez voisins pour servir de contrôle réciproque des opérations.

La largeur indiquée ici pour une transition $L_{\text{III}} \rightarrow K$, par exemple, n'est pas la largeur observée pour la raie correspondante, soit pour ^{74}W : $\Delta E_{K_{\alpha_1}} = 42{,}5$ eV, mais seulement la contribution de cette transition à la largeur totale du niveau K. La largeur observée pour $K\alpha_1$ est la somme des largeurs des niveaux K et L_{III}, car

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\dfrac{\xi^2}{\Gamma_K^2}} \, \frac{1}{1+\dfrac{(x-\xi)^2}{\Gamma_{L_{\text{III}}}^2}} \, d\xi = \text{const.} \, \frac{1}{1+\dfrac{x^2}{(\Gamma_K+\Gamma_{L_{\text{III}}})^2}},$$

Comme, d'après Margenau, $\Gamma_{L_{\text{III}}} \sim \frac{1}{10}\Gamma_K$, on peut considérer, en première approximation, la largeur de la raie $K\alpha_1$ comme égale à la largeur totale du niveau K. La largeur radiative totale calculée ici pour ce niveau étant de 39,0 eV, on peut admettre pour le coefficient de fluorescence total du niveau K de ^{74}W la valeur

$$\varpi_K = \frac{39{,}0}{42{,}5} = 0{,}915.$$

Signalons qu'il est possible de déduire des calculs ci-après, des coefficients de fluorescence partiels dont la somme est égale à ϖ_K.

L'intensité I_c calculée dans le présent article correspond au cas où la probabilité d'ionisation du niveau est égale à l'unité. Le calcul de la probabilité d'ionisation des différents niveaux par bombardement électronique est donc nécessaire pour interpréter les données expérimentales sur les mesures des intensités des raies X. Remarquons qu'à cette probabilité s'ajoute d'une manière plus complexe, celle correspondant à des situations libérées par effet Auger ou Coster-Kronig.

Cependant la probabilité d'ionisation d'un niveau étant fixée, il est possible de calculer les intensités relatives des raies correspondantes; c'est pourquoi les résultats sont groupés suivant les niveaux correspondant à l'ionisation initiale : K, L_{I}, L_{II}, L_{III}, Enfin signalons que la superposition des courbes est due aux changements d'échelles indiqués en marge.

1. **Raies** K. — *a.* Les règles de Burger et Dorgelo donnent quel que soit Z, la valeur 0,5 pour les doublets

$$K\alpha_2 : K\alpha_1 \quad \text{et} \quad K\beta_3 : K\beta_1.$$

Nous obtenons ici, pour $K\alpha_2 : K\alpha_1$ des valeurs généralement inférieures et s'en rapprochant quand Z diminue.

	[^{92}U].	^{83}Bi.	^{82}Pb.	[^{79}Au].	^{78}Pt.	^{74}W.	[^{51}Sb].
$K\alpha_2 : K\alpha_1$.....	0,47	0,46	0,45	0,48	0,46	0,47	0,49
$K\beta_3 : K\beta_1$.....	0,376	0,40	0,40	0,45	0,43	0,45	0,50

Les données expérimentales bien que rares sont en accord avec ces résultats; en particulier pour ^{74}W, Duane et Stenström [6] donnent

$$(\beta_1 + \beta_3) : (\alpha_1 + \alpha_2) = 0{,}23;$$

nous trouvons ici pour le même rapport

$$0{,}406 : 1{,}47 = 0{,}276.$$

Pour [^{51}Sb] la valeur observée par J. H. Williams [7] pour $\dfrac{K\beta_1 + K\beta_3}{K\alpha_1}$ est de 0,31, et celle calculée par H. S. W. Massey et E. H. S. Burhop est de 0,39.

b. Pour les raies quadrupôlaires correspondant

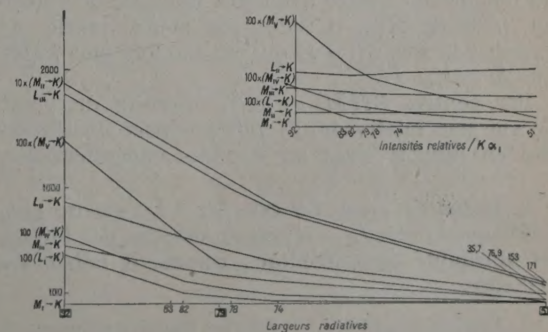


Fig. 1. — Transitions sur le niveau K.

Transitions sur le niveau K.

		[92U].	83Bi.	82Pb.	[79Au].	78Pt.	74W.	[51Sb].
$L_I \to K$	$P.10^3$ (u.t.H.)...	4,2	1,3148	1,01119	4,1	0,5037	0,222	0,001
	ΔE_X (eV)......	0,113	0,035	0,027	0,111	0,013	0,006	0,000027
	I_r.............	$2,2.10^{-3}$	$0,88.10^{-3}$	$0,88.10^{-3}$	$4,2.10^{-3}$	$0,49.10^{-3}$	$0,27.10^{-3}$	8.10^{-4}
$L_{II} \to K$ $K\alpha_2$	$P.10^3$ (u.t.H.)...	870	600	566,6935	486	462	371,837	76,9
	ΔE_X (eV)......	23,550	16,2	15,340	13,156	12,506	10,065	2,081
	I_r.............	0,47	0,46	0,45	0,48	0,46	0,47	0,49
$L_{III} \to K$ $K\alpha_1$	$P.10^3$ (u.t.H.)...	1785	1281,4	1227,305	970	985,46	788,332	153
	ΔE_X (eV)......	48,319	34,687	33,223	26,257	26,676	21,340	4,141
	I_r.............	1	1	1	1	1	1	1
$M_I \to K$	$P.10^3$ (u.t.H.)...	0,38	0,10	0,0624	0,04	0,027428	0,03733	0,05
	ΔE_X (eV)......	0,0102	0,00270	0,00167	0,00108	0,0007	0,0010	0,0013
	I_r.............	$2,3.10^{-4}$	$18,1.10^{-5}$	$5,7.10^{-5}$	$4,9.10^{-5}$	$3,1.10^{-5}$	$4,6.10^{-5}$	$3,7.10^{-4}$
$M_{II} \to K$ $K\beta_3$	$P.10^3$ (u.t.H.)...	190	133,83	129,0	115	104,802	80,915	17,1
	ΔE_X (eV)......	5,143	3,622	3,5	3,113	2,836	2,190	0,462
	I_r.............	0,12	0,12	0,12	0,13	0,12	0,126	0,13
$M_{III} \to K$ $K\beta_1$	$P.10^3$ (u.t.H.)...	498	326,709	307,918	252	246,76	196,274	35,7
	ΔE_X (eV)......	13,480	8,844	8,335	6,821	6,679	5,313	0,966
	I_r.............	0,32	0,30	0,30	0,29	0,28	0,28	0,26
$M_{IV} \to K$ $K\beta_5$	$P.10^3$ (u.t.H.)...	5,82	2,35	2,04	1,62	1,32	0,87	0,059
	ΔE_X (eV)......	0,157	0,0635	0,055	0,043	0,035	0,023	0,00159
	I_r.............	$3,2.10^{-3}$	$1,94.10^{-3}$	$1,9.10^{-3}$	$1,9.10^{-3}$	$1,6.10^{-3}$	$1,2.10^{-3}$	$4,3.10^{-4}$
$M_V \to K$ $K\beta_5$	$P.10^3$ (u.t.H.)...	14,08	6,45	5,70	3,53	3,40	2,62	0,114
	ΔE_X (eV)......	0,381	0,174	0,154	0,095	0,092	0,0790	0,003
	I_r.............	$8,9.10^{-3}$	$5,3.10^{-3}$	$5,3.10^{-3}$	$4,1.10^{-3}$	$4,0.10^{-3}$	$3,7.10^{-3}$	8.10^{-4}

à $K\beta_5$, il n'existe pas dans la zone étudiée de données expérimentales à comparer aux résultats du calcul.

c. Les raies provenant des transitions $L_I \to K$ et $M_I \to K$ ne sont pas strictement interdites en théorie de Dirac, la composition des parties angulaires des fonctions d'ondes étant différente de zéro, c'est la composition des parties radiales de ces fonctions d'ondes qui entraîne la faible probabilité d'existence de ces raies; il en est de même pour $M_I \to L_I$ ou $M_{II} \to L_{II}$; si l'on peut chercher à monter une expérience révélant la raie $L_I \to K$ de l'uranium du fait qu'elle semble avoir une intensité de l'ordre du 1/10e de $K\beta_5$, il serait par contre inutile de chercher la raie $M_I \to K$ qui est 100 fois plus faible que $L_I \to K$.

Par contre, $Ls(M_{III} \to L_{III})$, interdite du point de vue non relativiste, se voit attribuer une intensité en rapport avec les données expérimentales.

2. **Raies** L_I. — *a.* La raie $M_I \to L_I$, encore plus faible que la raie $L_I \to K$, est au-dessous des limites de sensibilité expérimentale, comme il fallait s'y attendre.

b. Pour le doublet $L\beta_4 : L\beta_3$ les règles de Burger et Dorgelo donnent, quel que soit Z, la valeur 0,5; le tableau ci-dessous permet la comparaison des valeurs calculées et des données expérimentales.

	[92U].	83Bi.	82Pb.	[79Au].	78Pt.	74W.	[51Sb]
$L\beta_4 : L\beta_3$:							
Calc........	0,865	0,80	0,80	0,70	0,75	0,71	0,58
Exp. [8]....	0,97	0,67	0,725	–	0,635	0,635	–

c. Pour les quadrupôles $L\beta_9 : L\beta_{10}$, le rapport calculé des intensités relatives semble se situer autour de 0,80.

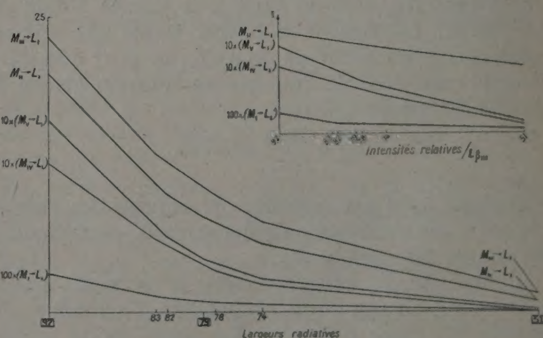


Fig. 2. — Transitions sur le niveau L_I.

Transitions sur le niveau $L_{\rm I}$.

		⁹²U	⁸³Bi.	⁸²Pb.	⁷⁹Au	⁷⁸Pt.	⁷⁴W.	⁵¹Sb
$M_{\rm I} \rightarrow L_{\rm I}$	$P.10^3$ (u.t.H.).....	0,033	0,01312	0,01218	0,0015	0,00907	0,00743	0,0001
	$\Delta E_{\rm X}$ (eV)........	0,000893	0,000355	0,000329	0,000040	0,000245	0,00026	0,0000027
	I_r...............	0,0018	0,00093	0,00093	$1,3.10^{-4}$	0,00087	0,00087	10^{-4}
$M_{\rm II} \rightarrow L_{\rm I}$ $L\beta_4$	$P.10^3$ (u.t.H).....	21,1	11,0995	10,4733	8,18	7,75146	5,7	0,88
	$\Delta E_{\rm X}$ (eV)........	0,571	0,300	0,282	0,221	0,209	0,154	0,023
	I_r...............	0,865	0,80	0,80	0,70	0,75	0,71	0,58
$M_{\rm III} \rightarrow L_{\rm I}$ $L\beta_3$	$P.10^3$ (u.t.H.).....	23,2	13,446	12,7587	11,35	9,9318	7,7224	1,52
	$\Delta E_{\rm X}$ (eV)........	0,628	0,363	0,345	0,307	0,268	0,209	0,041
	I_r...............	1	1	1	1	1	1	1
$M_{\rm IV} \rightarrow L_{\rm I}$ $L\beta_9$	$P.10^3$ (u.t.H.).....	1,27	0,61333	0,544	0,35	0,366	0,235	0,013
	$\Delta E_{\rm X}$ (eV)........	0,0343	0,0166	0,0147	0,0094	0,0099	0,00636	0,00035
	I_r...............	0,057	0,043	0,043	0,032	0,038	0,0326	0,008
$M_{\rm V} \rightarrow L_{\rm I}$ $L\beta_{10}$	$P.10^3$ (u.t.H.).....	1,62	0,7363	0,64479	0,45	0,437	0,285	0,015
	$\Delta E_{\rm X}$ (eV)........	0,0438	0,0199	0,0174	0,0121	0,0118	0,00771	0,00046
	I_r...............	0,073	0,057	0,053	0,041	0,045	0,0388	0,01

Allison et Armstrong [9] donnent pour ⁷⁴W

$$\frac{L\beta_9 \text{ ou } L\beta_{10}}{L\beta_3} = 0,04,$$

tandis que nous trouvons ici

$$\frac{L\beta_9}{L\beta_3} = 0,0326 \quad \text{et} \quad \frac{L\beta_{10}}{L\beta_3} = 0,0388.$$

3. **Raies** $L_{\rm II}$. — *a.* Nous avons expliqué pourquoi nous sommes limités à la comparaison des raies dont le niveau final est le même et regrettons de ne pouvoir comparer ici les intensités relatives du triplet $\alpha_1 : \alpha_2 : \beta_1$. (*voir* en Appendice une étude approchée de ce triplet).

b. Le quadrupôle $L\beta_{17}$ a été observé, mais l'on n'a pas de données expérimentales concernant son intensité.

c. La comparaison des intensités $L\eta : L\beta_1$ est cependant assez décevante car les données expérimentales donnent un rapport d'intensité de l'ordre

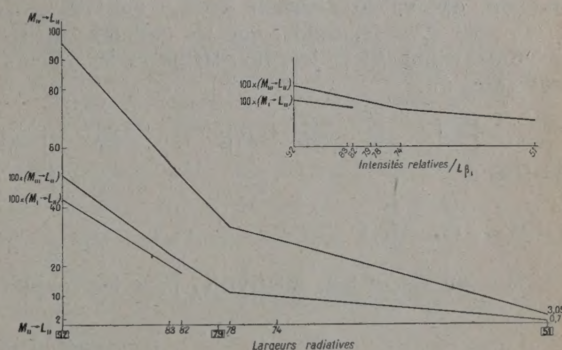


Fig. 3. — Transitions sur le niveau $L_{\rm II}$.

Transitions sur le niveau $L_{\rm II}$.

		⁹³U	⁸³Bi.	⁸²Pb.	⁷⁹Au	⁷⁸Pt.	⁷⁴W.	⁵¹Sb
$M_{\rm I} \rightarrow L_{\rm II}$ $L\eta$	$P.10^3$ (u.t.H.).....	0,43	0,206	0,177	0,43	0,117	0,30	-
	$\Delta E_{\rm X}$ (eV)........	0,0116	0,0055	0,0048	0,0116	0,00319	0,00812	-
	I_r...............	0,004	0,0034	0,0033	0,011	0,0032	0,0095	-
$M_{\rm II} \rightarrow L_{\rm II}$	$P.10^3$ (u.t.H.).....	~ 0	0,00232	0,0034	0,006	0,005	0,00465	2.10^{-4}
	$\Delta E_{\rm X}$............	~ 0	0,00006	0,00009	0,00016	0,00015	0,00012	$5,4.10^{-6}$
	I_r...............	~ 0	$3,9.10^{-5}$	$6,35.10^{-5}$	$1,6.10^{-4}$	$1,5.10^{-4}$	$1,5.10^{-4}$	5.10^{-5}
$M_{\rm III} \rightarrow L_{\rm II}$ $L\beta_{17}$	$P.10^3$ (u.t.H.).....	0,510	0,24	0,207	0,155	0,116	0,092	0,007
	$\Delta E_{\rm X}$ (eV)........	0,0138	0,0065	0,0056	0,00419	0,00312	0,00249	0,000189
	I_r...............	0,0052	0,00427	0,00415	0,0042	0,0036	0,00312	0,0022
$M_{\rm IV} \rightarrow L_{\rm II}$ $L\beta_1$	$P.10^3$ (u.t.H.).....	95,0	54,7	49,8	36,7	32,886	28,761	3,05
	$\Delta E_{\rm X}$ (eV)........	2,571	1,48	1,35	0,993	0,890	0,778	0,0825
	I_r...............	1	1	1	1	1	1	1

de un pour cent, soit environ cinq fois plus que ce que nous trouvons pour ^{83}Bi, ^{82}Pb et ^{78}Pt. Pour les raies dont l'intensité est faible et où la plus grande précision s'impose pour le calcul, en raison des singularités des parties radiales des fonctions d'ondes, il nous semble que les règles de Slater sont insuffisantes et nous nous proposons de reprendre leur calcul avec de meilleures données.

4. **Raies L_{III}.** — *a*. Pour $Ll : L\alpha_1$ on a

$Ll : L\alpha_1$:	^{92}U.	^{83}Bi.	^{82}Pb.	^{79}Au.	^{78}Pt.	^{74}W.	^{51}Sb.
Cal.......	0,026	0,0189	0,0176	0,016	0,015	0,012	–
Exp. [10]...	0,024	0,035	–	–	0,034	0,032	–

Nous exprimons pour $M_I \rightarrow L_{III}$, les mêmes regrets que pour $M_I \rightarrow L_{II}$, accusant là encore l'imperfection des règles de Slater pour le niveau M_I.

b. Bien qu'observables, on n'a pas encore de données expérimentales sur les intensités relatives de Lt et Ls.

c. Burger et Dorgelo donnent $L\alpha_1 : L\alpha_2 = 9 : 1$, quel que soit Z. Le calcul relativiste donne pour ce rapport des valeurs variant de 6,7 pour $Z = 92$ à 10 pour $Z = 51$, tandis que les données expérimentales connues à ce jour lui attribuent les valeurs suivantes :

$L\alpha_2 : L\alpha_1$:	^{92}U.	^{83}Bi.	^{82}Pb.	^{79}Au.	^{78}Pt.	^{74}W.	^{51}Sb.
Calc.......	15	11	11	12	10,8	10,7	10
Exp. [10]...	11	11,4	–	–	11,4	11,5	–

Dans un calcul non relativiste, pour les couples de niveaux L_{II} et L_{III}, M_{II} et M_{III}, M_{IV} et M_V, les parties radiales des fonctions d'ondes sont les mêmes. Il en résulte que seules les harmoniques sphériques interviennent dans les rapports des probabilités de transitions correspondantes qui ont alors une valeur indépendante de Z; ces harmoniques sphériques étant liées au nombre de situations possibles sur les niveaux correspondants, l'application des règles de Burger et Dorgelo (*Z. Physik*, 1924, **23**, 258) en découle.

Le calcul relativiste, par contre, attribue des parties radiales différentes à chacun des niveaux ci-dessus; il permet d'expliquer d'une part, la variation des intensités relatives avec Z et, d'autre part, les écarts observés aux règles de Burger et Dorgelo, écarts d'autant plus importants que l'énergie en jeu est plus grande, c'est-à-dire que Z est plus élevé. Enfin nous avons vu que sans exclure les raies telles que $\Delta l = 0$, comme le fait le calcul non relativiste, la théorie de Dirac leur attribue généralement des intensités en rapport avec l'état actuel des données expérimentales.

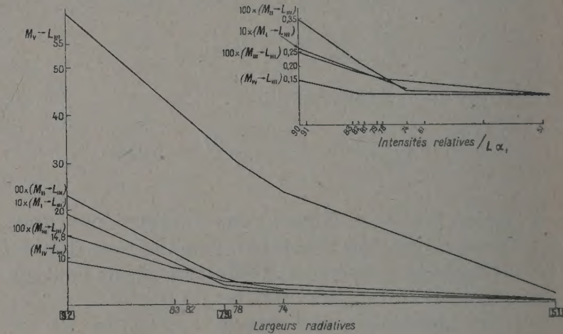


Fig. 4. — Transitions sur le niveau L_{III}.

Transitions sur le niveau L_{III}.

		^{92}U.	^{83}Bi.	^{82}Pb.	^{79}Au.	^{78}Pt.	^{74}W.	^{51}Sb.
$M_I \rightarrow L_{III}$ Ll	$P.10^3$ (u.t.H.).....	1,92	0,90	0,78	0,44	0,422	0,262	–
	ΔE_X (eV)........	0,0519	0,0244	0,0211	0,0119	0,0114	0,00709	–
	I_r...............	0,026	0,0189	0,0176	0,016	0,015	0,012	–
$M_{II} \rightarrow L_{III}$ Lt	$P.10^3$ (u.t.H.).....	0,23	0,1075	0,095	0,055	0,050	0,029	0,0023
	ΔE_X (eV)........	0,00622	0,0029	0,00258	0,00148	0,00135	0,00079	$6,2.10^{-5}$
	I_r...............	0,0036	0,00234	0,00222	0,0020	0,0016	0,00118	$9,6.10^{-4}$
$M_{III} \rightarrow L_{III}$ Ls	$P.10^3$ (u.t.H.).....	0,148	0,080	0,076	0,0495	0,049	0,042	0,0047
	ΔE_X (eV)........	0,0046	0,00217	0,00205	0,00133	0,00132	0,00113	0,000127
	I_r...............	0,0025	0,00183	0,00185	0,0025	0,0016	0,0016	0,0010
$M_{IV} \rightarrow L_{III}$ $L\alpha_2$	$P.10^3$ (u.t.H.).....	8,48	4,40	4,207	2,88	3,238	2,48	0,28
	ΔE_X (eV)........	0,229	0,119	0,113	0,0779	0,0875	0,067	0,0075
	I_r...............	0,15	0,11	0,11	0,12	0,108	0,107	0,10
$M_V \rightarrow L_{III}$ $L\alpha_1$	$P.10^3$ (h.t.H.).....	55,5	41,49	38,961	25,0	30,234	23,044	2,38
	ΔE_X (eV)........	1,502	1,123	1,054	0,676	0,818	0,623	0,064
	I_r...............	1	1	1	1	1	1	1

APPENDICE.

Étude du triplet $\alpha_1 : \alpha_2 : \beta_1$. — Il résulte d'un calcul de M. E. H. S. Burhop [11], que l'on peut prendre comme première approximation pour le rapport des probabilités d'ionisation par bombardement électronique des trois niveaux L,

$$u_{L_\text{I}} : u_{L_\text{II}} : u_{L_\text{III}} = 1 : 1 : 2.$$

Adoptons ces rapports sans tenir compte des transitions de type Auger ou Coster-Kronig parfois possibles, et étudions le triplet $L\alpha_1 : L\alpha_2 : L\beta_1$ pour lequel Burger et Dorgelo donnent 9 : 1 : 5. Nous avons déjà étudié $L\alpha_2 : L\alpha_1$; le tableau suivant donne alors $L\alpha_2 : L\beta_1$

$L\beta_1 : L\alpha_2$:	^{92}U.	^{83}Bi.	^{82}Pb.	^{79}Au.	^{78}Pt.	^{74}W.	^{51}Sb.
Calc.......	3,34	4,75	4,65	4,15	4,65	4,67	5
Exp. [10]...	4,45	4,9	-	-	4,5	4,5	-

Nous avons tenu à séparer cette étude de ce qui précède, la précision n'étant pas ici du même ordre.

Je tiens à remercier Mme I. Joliot-Curie qui a bien voulu m'accueillir dans son Institut et de l'intérêt bienveillant qu'elle m'a porté. Je tiens aussi à remercier M. M. Frilley dont les discussions constructives, les conseils avisés et la documentation étendue ont grandement facilité la rédaction de ce travail; il m'est très agréable de pouvoir lui témoigner ici ma profonde gratitude.

C'est grâce aux allocations fournies par le Centre National de la Recherche Scientifique que j'ai pu effectuer ce travail.

Manuscrit reçu le 20 mars 1955.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Massey H. S. W. et Burhop E. H. S. — The intensity of X-ray spectrum line of heavy elements. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1936, **32**, 461.
[2] Cauchois Y. — Tables. *J. Physique Rad.*, 1952, **3**, 113.
[3] Darwin C. G. — *Proc. Roy. Soc.*, 1928, A **118**, 654.
[4] Slater. — *Phys. Rev.*, 1930, **66**, 57.
[5] Laskar W. — *C. R. Acad. Sc.*, 1953, **236**, 2149.
[6] Duane et Stenstrom. — *Phys. Rev.*, 1920, **15**, 328-330. Meyer H. Th. — *Wiss. Veröff. Siemens-Konz.*, 1929, **7**, 108.
[7] Williams J. H. — *Phys. Rev.*, 1933, **44**, 146.
[8] Pour 92, 83 et 82 : Allison. — *Phys. Rev.*, 1929, **34**, 7. Pour 78 et 74 : Andrew V. J. — *Phys. Rev.*, 1932, **42**, 591.
[9] Allison et Armstrong. — *Phys. Rev.*, 1925, **26**, 714.
[10] Pour 74 et 78 : Jönsson A. — *Z. Physik*, 1926, **36**, 426. Pour 83 : Victor C. — Communication privée. Pour 92 : Allison. — *Phys. Rev.*, 1927, **30**, 245; 1928, **32**, 1.
[11] Burhop E. H. S. — *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1940, **36**, 1, 43.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM. TOME 16, AOUT-SEPTEMBRE 1955, PAGE 649.

ÉTUDE DE QUELQUES PHÉNOMÈNES OBSERVÉS SUR DES ÉCHANTILLONS MÉTALLIQUES IRRADIÉS DANS L'AIR PAR DES DEUTONS D'ENVIRON 3 MeV

Par A. KOHN et J. DOUMERC.

Sommaire. — On a examiné la validité d'une méthode de dosage de traces de carbone dans des échantillons de fer, par irradiation de courte durée dans un flux de deutons extérieurs de 3 MeV. Le principal phénomène à éviter est l'adsorption par les échantillons métalliques des gaz de l'air rendus radioactifs.

Dans un travail antérieur [1], Mme Joliot-Curie avait montré la possibilité de doser le carbone dans des échantillons d'acier, en comparant l'activité de ces échantillons à celle d'un étalon irradié simultanément dans des conditions analogues par le flux de deutons du Collège de France. La réaction $^{12}_{6}C(d,n)^{13}_{7}N$, qui donne naissance à du radioazote de période 10,2 mn, possède en effet une section efficace très élevée, et elle devrait pouvoir permettre une évaluation précise de teneurs très faibles en carbone; mais, au cours

de ces essais, on avait constaté l'existence de phénomènes parasites qui limitaient la sensibilité de la méthode. La présente étude avait pour but de déterminer l'origine de ces phénomènes, et de voir dans quelle mesure il serait possible de les éviter.

Alors que ce travail était en cours, Albert, Chaudron et Sue [2] ont mis au point une technique de séparation chimique, permettant d'isoler le radioazote formé dans des échantillons d'acier irradiés à l'intérieur de la chambre du cyclotron, et fournissant ainsi un autre moyen d'apprécier la teneur en carbone d'échantillons de fer très pur.

Hétérogénéité spatiale du faisceau de deutons. — La méthode essayée par Mme Joliot-Curie a l'avantage de supprimer tous les inconvénients qui résultent des variations inévitables du faisceau de deutons au cours du temps; mais il importe que les divers échantillons irradiés simultanément soient soumis à l'action des deutons, dans des conditions rigoureusement identiques.

Nous avons d'abord examiné l'homogénéité du faisceau de deutons au moyen d'une technique autoradiographique consistant à impressionner une

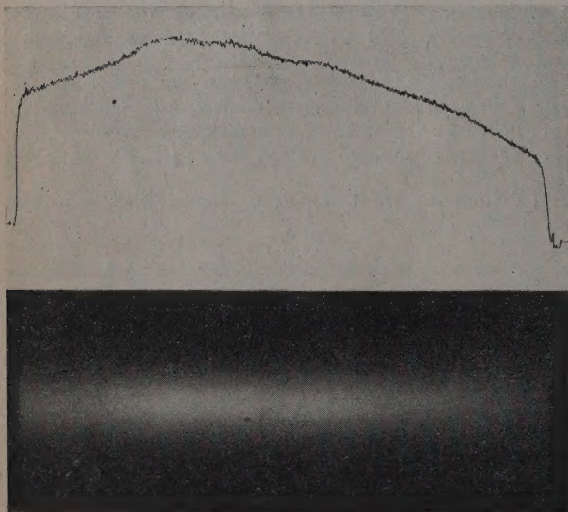


Fig. 1. — Reproduction d'une autoradiographie obtenue par irradiation d'une cible en graphite placée à 18,5 cm de la fenêtre du cyclotron, et de sa courbe photométrique.

émulsion photographique par un bloc de graphite usiné, irradié à des distances déterminées de la fenêtre du cyclotron. D'après l'examen des autoradiographies obtenues et les résultats de déterminations microphotométriques exécutées sur les clichés nous avons constaté que dans aucune section du flux, la répartition des deutons ne pouvait être considérée comme suffisamment homogène (voir *fig.* 1).

Afin d'éviter cet inconvénient, nous avons réalisé nos essais en utilisant une cible tournante, qui permettait de faire passer successivement trois échantillons dans la même partie du faisceau de deutons, à la cadence d'environ 200 fois par minute.

Activités produites dans des échantillons irradiés à différentes distances de la fenêtre. — Nous avons étudié les courbes de décroissance d'activité d'échantillons irradiés à 5, 12 et 18,5 cm de la fenêtre du cyclotron. Pour toutes ces positions nous avons observé, outre l'existence de l'activité de période 10 mn, la présence d'une activité intense de période 1,9 mn. De plus, on a constaté qu'une activité de période 18 h due à la réaction $^{54}_{26}Fe(d, n)^{55}_{27}Co$ se manifestait faiblement dans l'échantillon irradié à 12 cm, et de façon très importante dans l'échantillon irradié à 5 cm; celui-ci présentait également une activité peu intense de période plusieurs dizaines de jours. La seule activité de longue période décelée dans l'échantillon irradié à 18,5 cm était faible et avait une période de 100 à 200 mn (voir *fig.* 2).

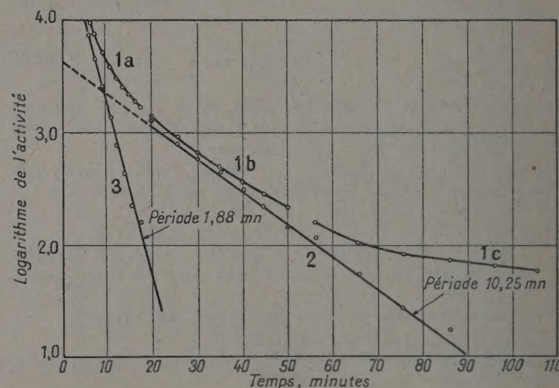


Fig. 2. — Décomposition de lacourbe de décroissance d'un échantillon à environ 0,002 pour 100 C, irradié à 18,5 cm de la fenêtre.

1. Tronçons des courbes représentant les mesures brutes, décalés pour donner une courbe continue; *a*. Mesures de 1 mn toutes les 1,5 mn; *b*. Mesures de 4,5 mn toutes les 5 mn; *c*. Mesures de 9,5 mn toutes les 10 mn.
2. Courbe obtenue après soustraction de la période longue supposée infinie par rapport aux autres périodes (62 c/mn).
3. Courbe obtenue après soustraction de la période longue et de la période 10 mn.

La courte période de 1,9 mn observée ne correspond à aucun radioélément connu; elle est intermédiaire entre la période de 2,1 mn du radio-oxygène formé par la réaction $^{14}_{7}N(d, n)^{15}_{8}O$ et la période de 1,2 mn du radiofluor dû à la réaction $^{16}_{8}O(d, n)^{17}_{9}F$. On verra par la suite qu'il est effectivement possible d'interpréter l'existence de cette période comme résultant de l'activation simultanée d'oxygène et d'azote.

L'activité de période 100 à 200 mn était trop faible (trois à quatre fois le mouvement propre) pour que

l'on puisse déterminer sa valeur avec exactitude. Elle pourrait être due à la réaction $^{58}_{26}Fe(d, \alpha)^{56}_{25}Mn$ qui produit du radiomanganèse de période 156 mn; d'autres réactions, que nous examinerons plus loin, pourraient également en être la cause.

Conditions de nos essais. — A la suite de ces essais préliminaires, nous avons disposé la cible tournante à 18,5 cm de la fenêtre du cyclotron; l'énergie des deutons en cette position est d'environ 3 MeV.

Les échantillons utilisés étaient des plaquettes de 10 mm de longueur utile, 5 mm de largeur et environ 2 mm d'épaisseur, polies à l'alumine, lavées à l'alcool et rincées à l'eau distillée bouillante. Les irradiations d'une durée de 10 mn étaient réalisées sous un flux dont l'intensité était voisine du maximum. La décroissance d'activité des échantillons irradiés simultanément était suivie par des mesures effectuées alternativement sur chacun d'entre eux.

Étude de l'activation de divers éléments sous l'influence de deutons d'environ 3 MeV. — Nous avons étudié la décroissance de l'activité produite par des échantillons variés afin de préciser l'influence possible de diverses impuretés contenues dans les échantillons d'acier (Al, Co, Cu, Mg, Mn, Ni, N, O); les résultats de ces essais sont indiqués dans le tableau I.

Dans tous les échantillons examinés, nous avons observé l'existence d'une activité de période 10 mn qui était du même ordre de grandeur que celle d'un échantillon d'acier à environ 0,02 pour 100 C.

Dans tous les échantillons, sauf sur les trois échantillons d'aluminium, nous avons distingué l'existence d'une très faible activité dont la période est de l'ordre de quelques heures.

Dans les échantillons de nickel et de cobalt où l'on a étudié la courbe de décroissance immédiatement après l'irradiation, on a observé l'existence d'une activité de période voisine de 1,9 mn. Dans l'échantillon nitruré on a également constaté la présence d'une activité intense de courte période, mais sa valeur n'a pu être calculée (il s'agit probablement de la période de 2,1 mn due à la réaction $^{14}_{7}N(d, n)^{15}_{8}O$). Dans les trois échantillons d'aluminium on a observé une activité intense de période 2,3 mn due à la réaction $^{27}_{13}Al(d, p)^{28}_{13}Al$.

Il semble peu probable que l'activité de période 10 mn observée sur ces divers échantillons soit due à l'activation de l'élément étudié sous l'influence des deutons; l'origine exacte de cette activité sera

TABLEAU I.

Résumé des résultats obtenus d'après les mesures de décroissance de divers échantillons métalliques.

Élément.	Nature de l'échantillon.	Rapport de l'activité 10 mn et de celle d'un échantillon à 0,02 pour 100 de carbone irradié simultanément.	Existence d'une période inférieure à 10 mn.	Existence d'une période supérieure à 10 mn.
Aluminium.....	Al commercial à 99,98	1,68	2,3 mn intense	Pas décelable à la 57e minute
Cuivre.........	Cu commercial	1,25	Pas étudiée	Serait d'environ 130 c/mn à la 100e mn
Cobalt.........	Pastille de Co	Pas déterminé	1,8 à 1,9 mn	Serait d'environ 200 c/mn à la 100e mn
Magnésium.....	Al à 0,5 pour 100 Mg	2,8	Activité courte intense de période non calculée (probablement 2,3 mn)	Pas de période longue discernable vers la 80e minute
	Al à 1 pour 100 Mg	2,5		
Manganèse.....	Acier à : 0,03 pour 100 C, 1 » Mn et 2 » Al	1,14	Pas étudiée	Environ 140 c/mn à la 87e minute
Nickel.........	Feuille de Ni commercial	1,7	1,9 mn	Environ 60 cm/n à la 85e minute
Oxygène.......	Acier à 0,03 pour 100 C oxydé à 300°	1,15	Oui (sa période n'a pu être déterminée)	Environ 80 cm/n à la 60e minute
Azote..........	Acier à 0,03 pour 100 C nitruré (plus de 10 pour 100 N dans la couche superficielle)	0,82	Très importante (sa période n'a pu être déterminée)	Environ 100 c/mn à la 53e minute

discutée plus loin, mais il n'est pas exclu qu'elle soit due — tout au moins en partie — à la présence de traces de carbone dans les échantillons.

Ces essais montrent donc que dans les conditions d'irradiation choisies (deutons d'environ 3 MeV), aucun des éléments étudiés ne serait susceptible de s'activer de façon appréciable en donnant une activité de période voisine de 10 mn, dans le cas où il serait présent à l'état de traces dans des échantillons de fer; l'azote, l'aluminium et éventuellement l'oxygène, produisent des radioéléments dont la période est nettement plus courte.

Comparaison de l'activité mesurée sur des échantillons à teneur différente en carbone. — Plusieurs irradiations effectuées sur trois échantillons identiques très riches en carbone, ont produit des activités de périodes 10 mn absolument comparables, les écarts observés étant inférieurs à l'erreur qui pouvait résulter des mesures d'activité; le dispositif à cible tournante supprimait donc toute cause d'erreur pouvant résulter de l'hétérogénéité du faisceau de deutons.

Des essais comparatifs ont été effectués sur des échantillons à 0,55, 0,25, 0,12 et 0,02 pour 100 C, irradiés par série de trois sur la cible tournante; les teneurs des trois échantillons les plus riches en carbone avaient pu être déterminées avec précision par des méthodes chimiques classiques.

Les points obtenus pour chaque série d'échantillons, en portant les valeurs des activités correspondant à un même instant en fonction de la teneur en carbone, s'alignent sensiblement, mais la droite ainsi tracée, au lieu de passer par l'origine des axes, recoupe l'axe des ordonnées en un point correspondant à une valeur négative comprise entre 0,010 et 0,015 pour 100 C.

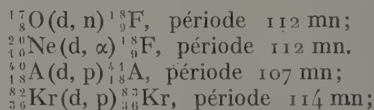
Ce résultat, confirmé plusieurs fois, indique qu'à l'activité due au carbone des échantillons s'ajoute une activité parasite de même période; les essais précédents montrent que cette activité supplémentaire ne peut être due à une impureté contenue dans le métal.

Étude de l'activité de l'air autour du cyclotron. — L'ensemble des phénomènes précédemment observés nous ont conduits à supposer que les échantillons métalliques étaient susceptibles d'adsorber les gaz radioactifs formés par l'activation de l'air situé sur le trajet des deutons.

Afin de vérifier cette hypothèse, nous avons fait fonctionner le cyclotron pendant 10 mn sans interposition de cible. Un compteur Geiger-Müller avait été placé dans le plan de la fenêtre du cyclotron, à environ 1 m de celle-ci, c'est-à-dire nettement en dehors du faisceau des deutons. Ce compteur était relié à un appareillage de mesure situé en dehors de l'enceinte du cyclotron.

Pendant le fonctionnement du cyclotron, l'activité était considérable, et 10 mn après l'arrêt du cyclotron, le compteur indiquait une activité de l'ordre de 100 000 c/mn. L'étude de la décroissance de cette activité, entre la 15e et la 90e minute, suivant l'arrêt du cyclotron, a permis d'identifier des activités de période 1,9 mn, 10 mn et environ 110 mn.

Cette activité ne peut être due qu'à l'activation des gaz de l'air, c'est-à-dire à l'oxygène et l'azote (période 1,9 mn), au gaz carbonique (période 10 mn) et à certains gaz rares ou à l'oxygène suivant les réactions possibles suivantes :


$^{17}_{8}O(d, n)^{18}_{9}F$, période 112 mn;
$^{20}_{10}Ne(d, \alpha)^{18}_{9}F$, période 112 mn.
$^{40}_{18}A(d, p)^{41}_{18}A$, période 107 mn;
$^{82}_{36}Kr(d, p)^{83}_{36}Kr$, période 114 mn;

Irradiation en atmosphères d'azote et d'argon. — Afin de préciser les conditions dans lesquelles s'effectue l'adsorption des gaz radioactifs de l'air, nous avons enfermé la cible tournante dans une chambre métallique close, munie de deux embouts fermés par des robinets et d'une fenêtre en feuille d'or à travers laquelle pouvait passer le faisceau de deutons.

A l'aide de ce dispositif, nous avons irradié des échantillons à environ 0,02 pour 100 C, en assurant une circulation d'argon ou d'azote à l'intérieur de la chambre : celle-ci qui était démontable, était ouverte dans un laboratoire où l'atmosphère était inactive.

La courbe de décroissance de l'activité de l'échantillon irradié en atmosphère d'azote a mis en évidence une activité très intense de période 2,1 mn due à la réaction $^{14}_{7}N(d, n)^{15}_{8}O$ et l'activité de période 10 mn du carbone de l'échantillon. Sur un autre échantillon irradié en atmosphère d'argon, on a observé l'existence de l'activité de période 10 mn et d'une activité relativement importante de période environ 2 h produite par la réaction $^{40}_{18}A(d, p)^{41}_{18}A$.

Conclusions. — Les essais auxquels nous avons procédé ont montré qu'il serait possible de doser des traces de carbone dans des métaux, en irradiant les échantillons et un étalon fixés sur une cible tournante, par des deutons d'environ 3 MeV. La comparaison des activités produites dans ces conditions offrirait un moyen correct d'apprécier la teneur en carbone des échantillons, en évitant toutes les causes d'erreur dues à l'hétérogénéité spatiale du faisceau ou aux variations du flux de deutons au cours du temps. Sous l'effet de deutons de cette énergie, l'activation du carbone a lieu avec une section efficace suffisante, alors qu'aucun des éléments, susceptibles d'être également présents dans les échantillons, ne peut donner naissance à des radioéléments de période voisine de celle du radioazote 13. Mais pour que cette méthode puisse être

appliquée, il faut éviter l'adsorption de gaz radioactifs par les échantillons irradiés.

En effet, l'étude de la courbe de décroissance de divers échantillons métalliques irradiés à l'air libre, a montré la présence d'activités de périodes environ 1,9 mn et 2 h et d'une activité supplémentaire de période 10 mn; or, l'activité de l'air au voisinage du cyclotron correspond à des radioéléments ayant ces mêmes périodes de décroissance. On peut donc en conclure que l'activité parasite observée sur les échantillons est due à l'adsorption par ces échantillons des gaz activés de l'air.

Si cette activité parasite était due à l'activation des gaz adsorbés spontanément par les échantillons avant l'irradiation, les activités observées devraient être sensiblement les mêmes quelle que soit l'atmosphère qui entoure les échantillons durant l'irradiation (air, azote ou argon), ce qui n'est pas le cas. Il paraît plus vraisemblable que cette activité est due aux radioéléments produits par les divers constituants de l'air sous l'influence des deutons, et adsorbés par les échantillons immédiatement après l'arrêt du cyclotron. Il est en effet probable que le choc des deutons détruit la couche initiale de gaz adsorbés et empêche quelle ne puisse se reformer de façon stable au cours de l'irradiation. De plus, il n'est pas impossible que ce bombardement détruise également la mince pellicule d'oxyde qui se forme spontanément sur la surface des métaux exposés à l'air, laissant ainsi le métal à nu dans un état particulièrement favorable à l'adsorption lorsque cesse l'irradiation; ce phénomène est d'ailleurs sans doute favorisé par la présence dans l'air de nombreux ions, dont certains proviennent des éléments transmutés, qui pourraient être rapidement fixés à la surface des échantillons.

Un ensemble cohérent de phénomènes observés au cours de cette étude nous conduit donc à admettre que des échantillons métalliques bombardés par des deutons sont particulièrement aptes à adsorber les gaz qui les entourent dès qu'ils ne sont plus frappés par ces particules.

On peut donc penser que toute méthode de dosage d'un élément basée sur la détermination de l'activité produite dans des échantillons métalliques par des particules dont le pouvoir de pénétration est très superficiel, est entachée d'une erreur (d'autant plus importante que la teneur de l'élément dosé est plus faible), si les échantillons sont mis en contact avec une atmosphère radioactive immédiatement après l'irradiation.

Les conditions matérielles dans lequelles nous avons entrepris cette étude ne nous ont pas permis jusqu'à présent de mettre au point les techniques propres à éviter ce phénomène. On pourrait songer à attaquer légèrement les échantillons par une solution acide, mais ce moyen non contrôlable risquerait de dissoudre une certaine quantité de métal, variable d'un échantillon à l'autre, et d'introduire ainsi une autre cause d'erreur. Il serait peut-être possible de réduire l'importance de l'adsorption de gaz radioactifs en recouvrant les échantillons d'une feuille métallique d'épaisseur constante, soigneusement fixée sur les bords des échantillons. La solution qui paraît la meilleure consisterait à irradier les échantillons sous vide ou sous hydrogène, à l'intérieur d'une chambre qui serait ouverte dans une atmosphère inactive. On pourrait également envisager de dégazer les échantillons sous vide après l'irradiation, mais ce procédé risque de demander trop de temps. Nous espérons pouvoir essayer ces diverses méthodes dès que les circonstances nous le permettront.

Nous tenons à remercier Mme Joliot-Curie pour l'intérêt avec lequel elle a suivi ce travail et pour les conseils précieux qu'elle nous a donnés au cours de sa réalisation. Nous adressons également nos remerciements à M. Joliot-Curie qui a bien voulu nous autoriser à disposer du cyclotron pour ces essais, malgré la gêne qui pouvait en résulter pour les chercheurs du Collège de France.

Enfin, nous ne saurions trop exprimer notre gratitude à M. Savel et à toute l'équipe de techniciens du cyclotron, grâce au concours desquels l'exécution matérielle de cette étude a été facilitée.

Manuscrit reçu le 14 avril 1955.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Curie I. — *J. Physique Rad.*, 1952, **13**, 33.
[2] Albert Ph., Chaudron C. et Sue P. — *J. Chimie Phys.*, 1953, p. C97.

LA DÉSINTÉGRATION DU ^{59}Cu ET LA STABILITÉ DES NOYAUX $^{2Z+1}_{Z}$X

Par M[lle] T. YUASA, M. E. NAHMIAS et M. VIVARGENT,

Laboratoire de Physique et Chimie nucléaires, Collège de France.

Sommaire. — Étude expérimentale de la désintégration du ^{59}Cu : $E_{\beta^+ max} = 1{,}85 \pm 0{,}05$ MeV; raie γ de $\sim 1{,}75$ MeV $\lesssim 2$ % des β^+. On en déduit une masse du ^{59}Cu de $58{,}95602 \pm 0{,}00030$ U. M. et une énergie de réaction $Q = 3{,}26 \pm 0{,}45$ MeV pour ^{58}Ni (d, n) ^{59}Cu. Considérations générales sur la stabilité des noyaux $^{2Z+1}_{Z}$X, en liaison avec le modèle du noyau en couches.

1. **Introduction.** — Au cours de l'examen de la stabilité des noyaux $^{2Z+1}_{Z}$X, nous nous sommes aperçus que la désintégration du ^{59}Cu, dernier noyau connu émetteur β^+ dans la série $^{2Z+1}_{Z}$X n'était pas encore étudiée. Nous avons donc entrepris cette étude afin de compléter les considérations générales sur la stabilité des noyaux $^{2Z+1}_{Z}$X.

L. A. Delsasso et al. [1] ont obtenu un radiocuivre, émetteur β^+ avec une période de 81 ± 2 s, en irradiant le Ni par les protons. Ils ont attribué cette radioactivité au ^{58}Cu qui serait produit par ^{58}Ni (p, n) ^{58}Cu, tandis que C. E. Leith et al. [2], en irradiant du ^{58}Ni, isotopiquement séparé, avec des protons, ont trouvé également un radiocuivre, émetteur β^+ de 81 s de période, qu'ils ont attribué au ^{59}Cu produit par ^{58}Ni (p, γ) ^{59}Cu. Ils ont aussi trouvé un radiocuivre de 10 mn de période, émetteur β^+, qu'ils ont attribué au ^{58}Cu.

Nous avons étudié la désintégration du ^{59}Cu produit par la réaction ^{58}Ni (d, n) ^{59}Cu, en irradiant du ^{58}Ni, isotopiquement séparé à Harwell, avec des deutons produits par le cyclotron du Collège de France et dont l'énergie maximum est

$$E_d = 6{,}4 \pm 0{,}15 \text{ MeV} \quad (^1).$$

2. **Procédés expérimentaux.** — *Préparation des cibles.* — Pour éliminer le plus possible les impuretés, nous avons utilisé comme cible du ^{58}Ni enrichi suivant les indications de Harwell, à 93,5 pour 100. Le NiO est transformé en $NiSO_4$ et électrolysé sur une feuille de platine ou d'or, en milieu neutre. Cible n° 1 : 1,5 mg/cm² de ^{58}Ni déposé sur une feuille de Pt de 40 mg/cm²; cible n° 2 : 9,8 mg/cm² de ^{58}Ni déposé sur une feuille d'or de 9,7 mg/cm². Le platine et l'or ont été choisis, car ils ne présentent aucun produit radioactif de courte période.

Irradiation avec des deutons. — La cible n° 1 est irradié par un faisceau canalisé de 0,1 μA de deutons de 5,3 MeV pendant 3 mn et portée ensuite sur un compteur à scintillations de INa (Tl) couplé à un photomultiplicateur RCA 5819, un amplificateur linéaire, un discriminateur d'énergie et une échelle de 1000.

L'étalonnage de l'ensemble est fait au moyen de ^{204}Tl, ^{22}Na, $^{65}Z_n$ et ^{60}Co. On trouve

$$E_{\beta^+ max} = 1{,}90 \pm 0{,}10 \text{ MeV}.$$

Ayant constaté que l'activité ainsi obtenue n'était pas suffisante pour nous permettre l'étude du spectre β^+, à l'aide d'un petit spectrographe magnétique à focalisation 180°, nous avons effectué l'irradiation des cibles n°s 1 et 2 par le faisceau non canalisé de 4 μA de deutons de $5{,}5 \pm 0{,}5$ MeV.

Les sources ainsi obtenues sont intenses mais elles présentent deux activités dont les périodes sont respectivement de $83{,}0 \pm 1{,}0$ s et de $10{,}0 \pm 0{,}5$ mn (²) (*fig.* 1). La dernière n'est pas produite par les neutrons parasites car elle ne se produit pas lorsque les deutons sont arrêtés par les écrans mis devant les cibles.

Pour identifier l'activité de 10 mn, on a irradié la cible n° 1 par les deutons d'environ 5,5 MeV pendant 13 mn, et l'on a cherché l'énergie maximum des β^+. On a trouvé $E_{max} < 0{,}7$ MeV et la présence de la raie d'annihilation très intense qui diminuait avec une période de $9{,}5 \pm 0{,}2$ mn, exactement égale à celle que nous avons observée dans la cible irradiée pendant 1 mn. On peut donc exclure la présence de ^{62}Cu qui pourrait se former à partir de ^{61}Ni (d, n) ^{62}Cu, parce que la limite supérieure du spectre β^+ est connue et égale à 2,9 MeV. D'autre part nous avons irradié du Ni ordinaire dont la surface et la masse superficielle sont identiques à celles de la cible n° 1. Ce Ni ordinaire contient environ 1,25 pour 100 de ^{61}Ni, c'est-à-dire environ 10 fois plus de ^{61}Ni que dans la cible n° 1. Malgré cela, nous n'avons pas observé le ^{62}Cu.

Donc l'activité observée de 10 mn serait très probablement celle de ^{58}Cu provenant de ^{58}Ni (d, $2n$) ^{58}Cu (²).

(¹) Cette valeur de E_d a été déterminée par M. Vivargent et G. Dupré.

(²) Le ^{58}Cu produit par ^{58}Ni (p, n) présenterait en outre suivant H. Tyren, [donnée non publiée (1952) et H. Tyren et P. A. Tove, *Phys. Rev.*, 1954, **96**, 773] une période de 3 s, et $E_{\beta^+} > 7{,}5$ MeV. Si l'existence de ce nucléide était confirmée il serait isomère de celui de 10 mn, mais il exigerait, pour être formé par (d, $2n$) une énergie des deutons bien supérieure à celle de notre faisceau.

Pour éviter la production de cette activité de 10,0 mn, nous avons irradié les cibles pendant 2 mn, et nous avons effectué deux séries de mesures de 40 s pour chaque irradiation, en débutant 50 s après la fin de l'irradiation. La première série servait de point de repère pour normaliser toutes les irradiations, la seconde série pour déterminer un point sur le spectre β^+ du ^{59}Cu.

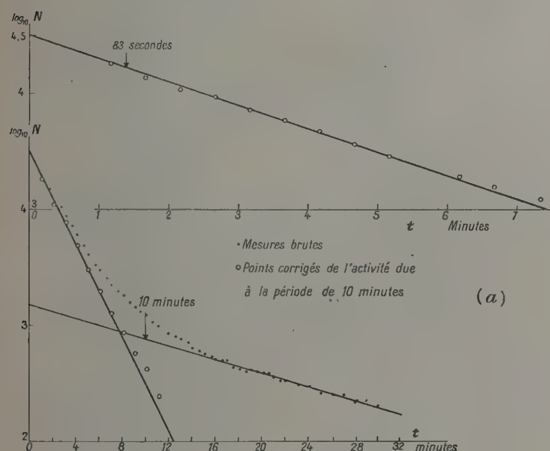


Fig. 1. — Décroissance du ^{59}Cu.
(a) Mesures faites avec un compteur Geiger.
(b) Mesure de la décroissance à l'aide du spectrographe magnétique — β.
$T_{\frac{1}{2}} = 82,5 + 0,5$ s.

Mesure du spectre β^+ *avec le spectrographe magnétique à focalisation* 180°. — Le spectrographe utilisé n'a pas été évacué en raison de la courte période de l'activité. Le détecteur était un compteur Geiger à bille de verre fermé par une feuille d'aluminium de 3,4 mg/cm² rempli par A (5 cm Hg) + C_2H_5OH (1 cm Hg). Le pouvoir de résolution du spectrographe est d'environ 5 pour 100.

Les mesures normalisées et ramenées au temps initial sont portées sur le graphique de la figure 2.

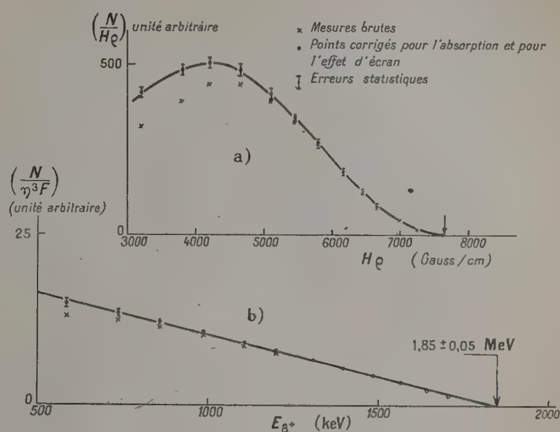


Fig. 2. — Spectre β^+ du $^{59}_{29}$Cu.
(a) Spectre β^+. (b) Courbe de Fermi.
$T_{\frac{1}{2}} = 83 \pm 1$ s.

Mesures des raies γ *avec le compteur à scintillations de* I Na (Tl). — Pour étudier l'existence des γ en dehors de la raie d'annihilation, nous avons utilisé un compteur à scintillations de I Na (Tl) couplé à un photomultiplicateur Dumont, un amplificateur linéaire, un analyseur d'impulsions à canal unique agissant sur une échelle de 1000.

En arrêtant les β^+ avec une plaque de Pb de 1 mm, nous avons mesuré les intensités des γ dans divers intervalles d'énergie. Les intensités sont ramenées au temps initial (*fig.* 3). Nous avons vérifié que la

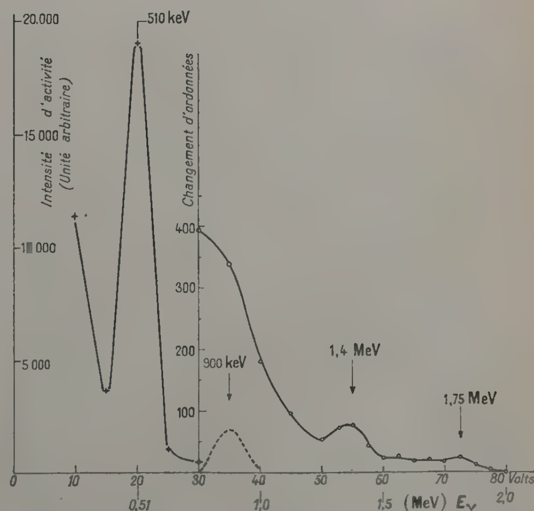


Fig. 3. — Rayons γ émis par $^{59}_{29}$Cu.

décroissance du pic d'annihilation correspondait bien à une période de 83,0 ± 1,0 s.

Étude de la courbe d'excitation de la réaction ^{58}Ni (*d*, *n*) ^{59}Cu. — Nous avons étudié la courbe d'excitation de la réaction ^{58}Ni (*d*, *n*) ^{59}Cu, en irradiant la cible n° 1, pendant 1 mn sur un support d'aluminium derrière des écrans absorbants et toujours dans les mêmes conditions géométriques par rapport au faisceau de deutons. Les intensités totales des faisceaux de deutons sont enregistrées et servent à la normalisation, mais avec une erreur due à la mesure intégrée du nombre de deutons. On a obtenu ainsi une courbe d'excitation approximative (*fig.* 4).

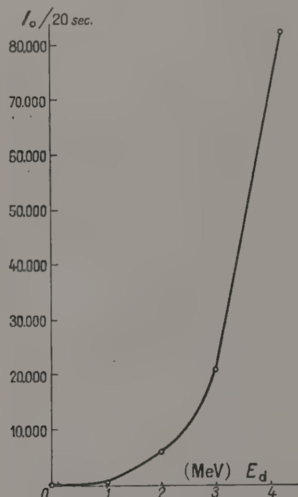


Fig. 4. — Courbe d'excitation pour $^{58}_{28}$Ni (*d*, *n*) $^{59}_{29}$Cu.

d'environ 1,75 MeV et le second aux photons Comptons de ce γ de 1,75 MeV.

On peut estimer les intensités relatives de ces γ par rapport au spectre β^+ total en utilisant le coefficient de rendement du INa (Tl) dont $\Phi = 28$ mm et $h = 23$ mm, et en tenant compte du coefficient de conversion interne des γ [4] de 0,5, 0,9 et 1,75 MeV. Nous obtenons respectivement γ de 0,9 MeV/β^+ = 1,75 pour 100 et γ de 1,75 MeV/β^+ = 2,24 pour 100. L'intensité et l'énergie du pic de 1,4 MeV correspond à peu près à celle du maximum des Comptons de la raie γ de 1,75 MeV. On peut donc supposer qu'il y a, en dehors de la raie d'annihilation, une raie γ de faible intensité ($\lesssim$ 2 pour 100) ayant une énergie d'environ 1,75 MeV.

On peut exclure la possibilité du schéma de transition de la figure 5 *a*, et admettre éventuellement le schéma de la figure 5 *b* [3]. Nous n'avons pas étudié

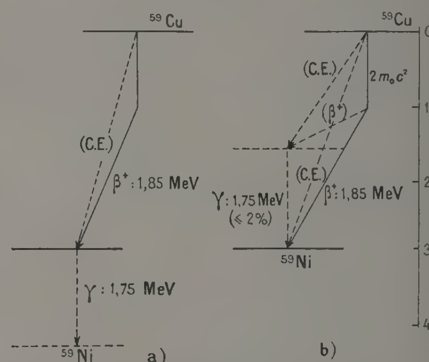


Fig. 5. — Schéma de désintégration du ^{59}Cu.
Les transitions indiquées par des lignes pointillées sont hypothétiques.

3. **Résultats expérimentaux et discussions.** — D'après la figure 1 *a* et *b*, nous avons obtenu, comme période du ^{59}Cu, 83,5 ± 1,0 s. D'après la figure 2 *a* en faisant les corrections dues à l'épaisseur des sources, celle de l'air traversée par les β^+ dans le spectrographe et celle de la fenêtre du compteur, et la correction pour l'effet d'écrans pour les β^+ [3], nous avons obtenu la courbe de Fermi (*fig.* 2 *b*), qui donne $E_{\beta\,\max} = 1{,}85 \pm 0{,}05$ MeV en accord dans le domaine d'erreurs avec la valeur obtenue avec le compteur à scintillations. La probabilité qu'il y ait des composantes β^+ ayant $E_{\max} < 0{,}5$ MeV n'est pas exclue étant donné que notre dispositif expérimental (épaisseur du compteur et de la source) introduit trop de corrections dans ce domaine d'énergies.

D'après la figure 3, nous observons, en dehors de la raie d'annihilation, trois pics à ∼ 0,9, ∼ 1,4 et ∼ 1,75 MeV. On pourrait attribuer le premier à l'effet de l'empilement double des photons d'annihilation; le troisième à la raie photoélectrique d'un γ

la capture électronique, mais elle est probable d'après la théorie [5].

D'après la courbe d'excitation de ^{58}Ni (*d*, *n*) ^{59}Cu (*fig.* 4), on peut constater que la section efficace de cette réaction augmente brusquement avec $E_d \geq 1{,}8$ MeV.

Si nous cherchons la masse du ^{59}Cu, en partant, de celle du ^{59}Co, 58,952 038 ± 0,000 20 déduite des doublets $\left(C_3H_7O - \frac{1}{2}\,{}^{118}Sn\right)$ et de $\left(\frac{1}{2}\,{}^{118}Sn - {}^{59}Co\right)$ [6] et en utilisant la valeur de l'énergie de désintégration $Q = 1{,}07$ MeV [7] pour la capture *K* du ^{59}Ni, et avec $E_{\beta^+\max}$ de ^{59}Cu = 1,85 ± 0,5 MeV, nous obtenons 58,956 32 ∓ 0,000 60 pour la masse de ^{59}Cu. Cette valeur est assez concordante avec

(3) T. Yuasa et G. A. Renard utilisant un compteur à scintillations relié soit à un sélecteur à canal unique, soit à un sélecteur à 50 canaux, n'ont pas trouvé de γ émis par ^{59}Cu dont l'énergie serait comprise entre 80 et 450 keV et dont l'intensité serait supérieure à 0,2 pour 100 des β^+.

58,955 82 ± 0,000 60, calculée pour la masse de ^{59}Cu en partant de la masse de ^{59}Ni : 58,952 77 ± 0,000 09 obtenue récemment spectroscopiquement [8]. Nous proposons comme masse de ^{59}Cu, la valeur moyenne de ces deux valeurs expérimentales soit 58,956 02 ± 0,000 30.

Cette valeur est inférieure à celle : 58,963 99, estimée d'après la formule semi-empirique de Weizsäcker corrigée [9].

D'autre part R. H. Nussbaum et al. [10] suggèrent, d'après le diagramme $Z - \Delta M$ pour la série Cu-Ni, dont le nombre de masse est impair, que ΔM pour ^{59}Cu-^{59}Ni serait de 4,3 MeV, valeur supérieure de 1,44 MeV à celle que nous trouvons :

$$1,85 \text{ MeV} + 2\,mc^2 = 2,86 \text{ MeV}.$$

En calculant la masse du ^{58}Ni, en partant du doublet $\left(\text{COH} - \frac{1}{2}\,{}^{58}\text{Ni}\right)$ on trouve : 57,953 76 ± 0,000 25 [6]. En utilisant cette valeur et celle de 58,956 02 ± 0,00030 pour la masse du ^{59}Cu, nous pouvons calculer l'énergie de réaction Q, pour ^{58}Ni (d, n) ^{59}Cu. On trouve $Q = + 3,2 \pm 0,45$ MeV. Cette valeur est assez concordante avec celle : 3,05 MeV, estimée d'après le nomogramme de A. E. S. Green et en tenant compte des corrections (4) signalées [11]. Cette concordance nous montre que la masse de ^{59}Cu et l'énergie maximum des β^+ de ^{59}Cu obtenues expérimentalement sont compatibles avec les autres données expérimentales obtenues indépendamment. D'autre part nous pouvons calculer la hauteur de la barrière de potentiel Coulombienne, W, pour la réaction ^{58}Ni (d, n) ^{59}Cu. On trouve $W = 5,21$ MeV.

4. Stabilité des noyaux $^{2Z+1}_{Z}$X. — Nous avons établi deux diagrammes concernant la stabilité des noyaux $^{2Z+1}_{Z}$X (*fig.* 6 *a* et *b*) : celui de $E_\beta = f(Z)$ et celui de $\log ft = f(Z)$.

Dans le premier diagramme, on peut constater que $E_{\beta+}$ croît avec Z, sauf pour $Z = 26$ et 28 dans les Z pairs et $Z = 27$ dans les Z impairs. Ces irrégularités autour de $Z = 26$, 28 et 27 peuvent être expliquées par l'effet du nombre magique 28, autrement dit par la saturation de la couche $4f_{\frac{7}{2}}$ avec des protons ou avec des neutrons (*voir* les flèches indiquant l'influence du nombre magique (Z ou N) du noyau initial ou final). Dans le deuxième diagramme, $\log ft$ se place en général autour de 5, domaine des transitions permises et non favorisées, tandis que ^{59}Cu dont $\log ft = 3,6$ se place plutôt dans celui des transitions permises et favorisées. ^{55}Co dont $\log ft = 6,3$ et 5,8 se place dans le domaine des transitions interdites du premier ordre. Ce fait pourrait être expliqué par la configuration en couches des nucléons. Dans le cas du ^{59}Cu, la désintégration se traduirait par la transformation d'un proton dans l'état 3 $p_{\frac{3}{2}}$ en un neutron dans le même état. Ce passage est théoriquement favorable et

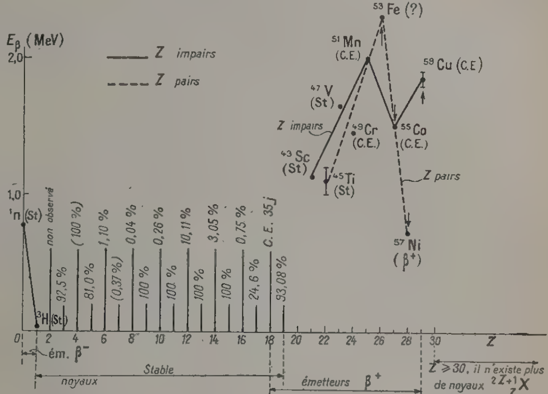


Fig. 6 *a*. — Diagramme $E_\beta = f(Z)$ pour les noyaux $^{2Z+1}_{Z}$X. Les flèches indiquent le sens de l'influence du nombre magique 28. (St), (β^+), (C. E.) : ces symboles signifient que le noyau final de la désintégration β^+ est stable, émetteur β^+ ou siège de capture électronique.

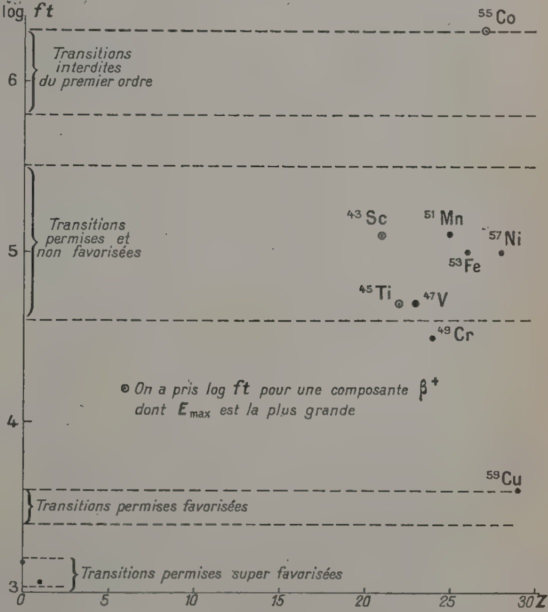


Fig. 6 *b*. — $\log ft$ en fonction de Z pour les noyaux $^{2Z+1}_{Z}$X.

par conséquent placerait cette transition dans un domaine voisin de celui des transitions permises et favorisées. Par contre la désintégration de ^{55}Co se traduirait par la transformation d'un proton dans l'état $4f_{\frac{7}{2}}$ en un neutron 3 $p_{\frac{3}{2}}$, ce qui est théori-

(4) On a pris pour Z_s, valeur la plus stable à masse atomique constante, *voir* I. Joliot-Curie, *J. Physique Rad.*, 1945, **6**, 209.

quement très interdit. En effet, l'expérience a montré [12] que la transition $^{55}Co \to {}^{55}Fe$ à l'état fondamental est interdite. La transition pour la composante β^+ de 1,50 MeV serait $f_{\frac{7}{2}} \to f_{\frac{5}{2}}$ et celle relative aux β^+ de 1,03 MeV, $f_{\frac{7}{2}} \to g_{\frac{9}{2}}$ avec respectivement $\log ft = 6{,}3$ et 5,8. La dernière valeur est compatible avec la transition $f_{\frac{7}{2}} \to g_{\frac{9}{2}}$, transition interdite du premier ordre, mais la première ne serait pas compatible avec une transition $f_{\frac{7}{2}} \to f_{\frac{5}{2}}$, qui, elle, est permise. Ce point reste donc à élucider.

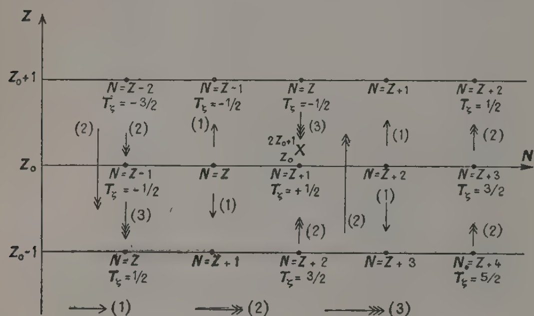


Fig. 7. — Abondance privilégiée des noyaux ${}^{2Z+1}_{Z}X$, Z impairs. Les flèches indiquent la direction de la stabilité isobarique
(1) à cause de Z, N impair-impair;
(2) à cause de l'effet de symétrie qui donne la stabilité plus grande pour T_ζ petit (T_ζ, spin isotropique);
(3) à cause de l'effet de la charge qui donne plus de stabilité pour $T = \frac{1}{2}$ que pour $T_\zeta = -\frac{1}{2}$ si le rayon du noyau $R < (A - 1) \times 1{,}05 \cdot 10^{-13}$ cm.

La désintégration de ^{57}Ni vers l'état fondamental de ^{57}Co serait du même genre que celle de ^{55}Co; un proton $4f_{\frac{7}{2}}$ changeant à un neutron $3p_{\frac{3}{2}}$ et par conséquent interdite. En effet, on sait expérimentalement [13] que cette transition $^{57}Ni \to {}^{57}Co$ à l'état fondamental est interdite, tandis que la forme du spectre β^+ aboutissant au premier état excité de ^{57}Co est du type des transitions permises.

Par ailleurs, nous avons observé une autre régularité assez remarquable chez les noyaux ${}^{2Z+1}_{Z}X$: les noyaux stables appartenant à cette série et ayant Z impair ont une abondance naturelle de près de 100 pour 100, par contre ceux ayant Z pair ont une très petite abondance. Cette régularité peut être expliquée qualitativement par l'influence de l'effet de symétrie et celui de la charge sur l'interaction *n-n*, *n-p* et *p-p*. Nous le montrons schématiquement pour le cas Z impair dans la figure 7 où l'on voit l'abondance privilégiée de ${}^{2Z+1}_{Z}X$ par rapport aux autres isotopes. Pour le cas Z pair, on peut raisonner également de la même façon. Dans cette régularité il y a trois exceptions : ^{15}N (0,13 pour 100) et ^{35}Cl (24 pour 100) dans les noyaux Z impairs et ^{9}Be (100 pour 100) dans les noyaux Z pairs. La petite abondance de ^{15}N pourrait être expliquée par l'abondance privilégiée de ^{14}N, qui appartient à la série ${}^{2Z}_{Z}X$. Par ailleurs l'abondance 100 pour 100 de ^{9}Be serait en contradiction avec cet argument vu que le ^{8}Be appartient également à la série ${}^{2Z}_{Z}X$. Mais l'instabilité α de ce nucléide classerait le couple ^{9}Be-^{8}Be dans une catégorie différente du couple ^{15}N-^{14}N.

Nous tenons à exprimer notre reconnaissance au Professeur F. Joliot pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter à ce travail, et au Professeur L. Rosenfeld avec qui nous avons eu d'utiles conversations.

Nous remercions l'équipe du cyclotron du Collège de France pour sa collaboration.

Manuscrit reçu le 23 mars 1955.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Delsasso L. A., Ridenour L. N., Sherr R. et White M. G. — *Phys. Rev.*, 1939, **55**, 113.
[2] Leith C. E., Bratenahl A. et Moyer J. — *Phys. Rev.*, 1947, **75**, 732.
[3] Reitz J. R. — *Phys. Rev.*, 1950, **77**, 10.
[4] Mc Gowan F. K. — *Phys. Rev.*, 1954, **93**, 163.
[5] Feenberg E. et Trigg G. — *Rev. Mod. Phys.*, 1950, **22**, 399.
[6] Duckworth H. E., Hogg B. G. et Pennington E. M. — *Rev. Mod. Phys.*, 1954, **26**, 463.
[7] Singer S. E., Emmerich W. S. et Kurbatov J. D. — *Phys. Rev.*, 1954, **94**, 113 et 779 A.
[8] Collins T. L., Johnson W. H. et Nier A. O. — *Phys. Rev.*, 1954, **94**, 398.
[9] Table de Metropolis N. et Reitwiesner G. — N. P. 1980, mars 1950, Oakridge.
[10] Nussbaum R. H., Van Liesbout R., Wapstra A. H., Verster N. P., Ten Haaf F. E. L., Nijgh G. J. et Ornstein L. Th. M. — *Physica*, 1954, **20**, 555.
[11] Green A. E. S. — *Nucléonics*, 1955, **13**, 34.
[12] Caide R. S. et Mitchel A. C. G. — *Phys. Rev.*, 1954, **94**, 412.
[13] Canada R. et Mitchel A. C. G. — *Phys. Rev.*, 1951, **83**, 955.

SUR UNE MÉTHODE NOUVELLE D'ÉTUDE DES PHÉNOMÈNES RADIOACTIFS : CINÉ-NUCLÉOGRAPHIE

Par M. MARCEL LAPORTE,
Laboratoire de Recherches électroniques de l'Institut du Radium,
Faculté des Sciences de Paris.

Sommaire. — Nouvelle application de la méthode de ciné-nucléographie. Il est indiqué comment il est possible, par examen d'une plaque nucléaire, irradiée par une source mobile de dépôt actif de thorium, de déterminer la période du thorium C'.

1. Dans un premier Mémoire (1), nous avons donné des renseignements généraux concernant la méthode de ciné-nucléographie et son application à la mesure, en valeur absolue, des activités de sources radioactives émettrices de rayons α.

Une autre application de la méthode concerne l'étude des phénomènes en quasi-coïncidence.

Nous nous bornerons dans ce Mémoire à l'étude des coïncidences dans l'émission de rayons corpusculaires, coïncidences que l'on rencontre dans certaines filiations radioactives.

2. **Quasi-coïncidences de filiation.** — Il est facile de se rendre compte que des émissions très rapprochées de deux rayons R et R', dont nous dirons qu'ils sont en quasi-coïncidence de filiation, se produisent toutes les fois que la vie moyenne θ d'un corps radioactif S' (émetteur de rayon R'), provenant par filiation directe d'un corps S (émetteur de rayons R), est extrêmement courte.

On sait, en effet, d'après la loi générale de désintégration radioactive, que sur un nombre n d'atomes d'un corps S', de vie moyenne θ, existant à un instant que l'on peut choisir comme origine des temps, le nombre ou, plus exactement, le nombre le plus probable p des atomes qui subsistent à un instant τ est donné par la relation

$$p = n\, e^{-\frac{\tau}{\theta}}. \qquad (1)$$

Dans cette expression ne figurent pas les instants où les n atomes de S' ont pris naissance, c'est-à-dire que la loi de survivance est « indépendante » de l'âge qu'avaient les différents atomes de S' à l'instant zéro.

On peut donc considérer que les n atomes de S' ont tous été formés à l'instant zéro et que la relation (1) indique le nombre de ceux qui ont une durée de vie supérieure à τ.

Il en résulte que p représente aussi le nombre des intervalles de temps, supérieurs à τ, entre l'émission d'un rayon R qui accompagne la naissance d'un atome A' du corps S' et l'émission du rayon R' qui accompagne la désintégration de ce même atome.

Si l'on remarque que pour $\frac{\tau}{\theta} \geqq 5$, $e^{-\frac{\tau}{\theta}} \leqq 0{,}0035$, on voit que moins de 1 pour 100 des atomes de S' ont une durée de vie supérieure à cinq fois la vie moyenne.

Si donc cette vie moyenne est très courte, par exemple d'une microseconde, plus de 99 pour 100 des filiations $A \rightarrow A'$, puis $A' \rightarrow A''$ se succèdent à moins de $5\,\mu$ s et il en est de même des émissions des rayons R et R' qui accompagnent ces filiations.

Par exemple, si l'on admet que la vie moyenne du ThC' est de 3.10^{-7} s plus de 99 pour 100 des atomes de ThC' ont une vie inférieure à $1{,}5.10^{-6}$ s et, par suite, plus de 99 pour 100 des intervalles de temps qui séparent l'émission du rayon β dans la désintégration Th$C \rightarrow$ Th$C' + \beta$ de l'émission du rayon α dans la désintégration Th$C' \rightarrow$ ThD $+ \alpha$ seront inférieurs à $1{,}5.10^{-6}$ s.

Nous dirons que les émissions des deux rayons qui accompagnent respectivement l'apparition et la désintégration d'un même atome radioactif sont « couplées par filiations ».

Nous venons de voir que des émissions couplées se produiront en quasi-coïncidence toutes les fois qu'elles seront relatives à une substance radioactive à vie moyenne très brève.

Il est intéressant de préciser la loi de répartition des intervalles de temps qui séparent deux émissions couplées.

3. **Loi de répartition des intervalles de temps qui séparent deux émissions couplées.** — Considérons n_c intervalles entre émissions couplées, c'est-à-dire, d'après ce qui précède, les durées de vie de n_c atomes d'une substance S' de vie moyenne θ.

Nous nous proposons de déterminer la fonction $f(\tau)$ telle que

$$dn_\tau = n_c f(\tau)\, d\tau, \qquad (1)$$

dn_τ représentant le nombre des atomes dont la durée de vie est comprise entre deux valeurs voisines τ et $\tau + d\tau$, c'est-à-dire aussi le nombre des intervalles entre émissions couplées compris entre τ et $\tau + d\tau$.

Sur un nombre n_c d'atomes, dont on peut supposer

(1) *J. Physique Rad.*, 1954, **15**, 705.

qu'ils ont tous pris naissance à l'instant o, le nombre de ceux qui se désintègrent entre les instants τ et $\tau + d\tau$ est, d'après (1)-(2),

$$-dp = n_C \frac{1}{\theta} e^{-\frac{\tau}{\theta}} d\tau$$

et c'est aussi le nombre des atomes dont la durée de vie est comprise entre τ et $\tau + d\tau$ et donc celui des intervalles entre émissions couplées; on a donc

$$dn_\tau = n_C \frac{1}{\theta} e^{-\frac{\tau}{\theta}} d\tau. \qquad (2)$$

Cette loi exponentielle décroissante montre que les intervalles d'émissions couplées les plus courts sont les plus probables; nous avons déjà indiqué que plus de 99 pour 100 des intervalles ont une durée inférieure à cinq fois la vie moyenne θ de la substance S'.

Ainsi une première propriété caractéristique des rayons couplés consiste dans la petitesse très probable de l'intervalle de temps qui sépare leurs émissions.

Une seconde propriété caractéristique de deux rayons couplés par filiations est la suivante :

4. **Deux rayons couplés par filiations proviennent d'un même point de la source radioactive.** — En effet, considérons un atome A situé en un point M; la désintégration de l'atome A donne naissance à un rayon R issu du point M et à un atome A'.

Cet atome A' ne s'écarte du point M que d'une distance égale au recul radioactif; cet éloignement étant négligeable, le rayon R' (couplé du rayon R), émis par l'atome A' au cours de sa désintégration pourra être considéré comme provenant du même point M que le rayon R.

Cette propriété est caractéristique des rayons couplés. En effet, les sources n'étant jamais rigoureusement ponctuelles, deux rayons R et R' pris au hasard, proviendront en général de deux atomes situés en des points M et M' différents.

5. **Nature des rayons couplés par filiations.** — On sait que les plaques nucléaires sont insuffisamment sensibles aux rayons γ et n'enregistrent avec sécurité que les rayons α ou β.

Ces restrictions limitent l'emploi de la méthode ciné-nucléographique. Un problème intéressant qui lui reste accessible est celui de la détermination de la vie moyenne d'un corps *C'*.

On sait, en effet, que la formation et la désintégration des corps *C'* (Ra*C'*, Th*C'* et Ac*C'*) s'accompagnent respectivement de l'émission d'un rayon β et de celle d'un rayon α.

Nous supposerons dans ce qui suit que les rayons couplés sont corpusculaires et de natures « différentes » : l'un des rayons sera, par exemple, un rayon β et le second un rayon α ou inversement.

6. **Traces « couplées » et traces « non couplées ».** — Notre but étant de déterminer par ciné-nucléographie la vie moyenne, supposée courte, d'une substance radioactive, c'est-à-dire, comme nous l'avons indiqué, la moyenne arithmétique d'un grand nombre d'intervalles entre émissions couplées, nous sommes amenés à rechercher si cette détermination est possible à partir d'observations et de mesures relatives aux traces inscrites sur une plaque au cours de son exposition aux rayonnements d'une source mobile.

Il est clair qu'il y aurait intérêt à ne considérer que les paires de traces relatives à des rayons couplés, c'est-à-dire que les paires formées de ce que nous appellerons des « traces couplées ».

Comme il n'est malheureusement pas possible par examen au microscope de la trace d'un rayon (en particulier d'un rayon β), de fixer avec une précision suffisante la direction de ce rayon, il est impossible de s'assurer si deux traces proviennent de deux rayons émis par un même point de la source, c'est-à-dire qu'il est impossible de reconnaître si deux traces sont ou ne sont pas couplées.

Notre étude étant limitée au cas où les rayons couplés sont des rayons corpusculaires de natures différentes, une condition nécessaire pour que deux traces soient couplées, c'est que l'une soit une trace α et l'autre une trace β; mais, cette condition qu'il est en général facile de vérifier, n'est pas suffisante pour affirmer que deux traces sont couplées.

Pour étudier une substance radioactive S' à vie moyenne très brève il est nécessaire d'utiliser une source qui contienne une substance mère S de période suffisamment longue.

Dans ce qui suivra nous supposerons que la substance S' (par exemple le Th*C'*) et la substance S par exemple le Th*C*), sont en équilibre radioactif et que la période de S est suffisamment longue par rapport à la durée d'exposition de la plaque pour que l'on puisse négliger sa décroissance; nous supposerons, en outre, que la filiation a lieu *sans* embranchement.

Dans ces conditions, chaque émission d'un rayon R qui accompagne la formation d'un atome A' de S' est suivie de l'émission du rayon couplé R' qui accompagne la désintégration de A'.

Chacun des rayons d'un couple étant émis au hasard en direction, il en résulte, au point de vue des traces, que les quatre éventualités suivantes sont également probables, la source étant supposée se déplacer sous la plaque :

1° Les deux rayons couplés R_1 et R'_1 sont émis vers le haut, c'est-à-dire vers la plaque; les traces α et β correspondantes forment un couple;

2° Un rayon R_2 est émis vers la plaque et le rayon couplé R'_2 en sens inverse; la plaque portera une trace α qui ne pourra être associée à aucune autre trace β comme partenaire d'un couple;

3° Un rayon R_3 est émis vers le bas et le rayon couplé R'_3 vers la plaque; celle-ci portera une trace β sans partenaire de couplage;

4° Les deux rayons sont émis vers le bas et ne donnent pas de traces sur la plaque.

En résumé sur $4p$ émissions de rayons α et $4p$ émissions de rayons β, $2p$ rayons α et $2p$ rayons β sont dirigés vers la plaque qui portera $2p$ traces α et $2p$ traces β.

On ne pourra associer en couples que p traces α et p traces β. Le nombre total des associations comportant une trace α et une trace β sera $4p^2$; p seulement de ces associations seront « couplées » et, par suite, $4p^2 - p$ seront « non couplées » ou, nous dirons aussi, « découplées ».

Si nous posons $n = 4p^2$, on peut dire que sur n paires de traces (dont une α et une β), prises au hasard, il sera probable d'en rencontrer $p = \frac{1}{2}\sqrt{n}$ couplées et $n - \frac{1}{2}\sqrt{n}$ découplées. Par exemple, sur $n = 400$ paires de traces prises au hasard, il serait probable d'en rencontrer 390 découplées et 10 seulement couplées.

En pratique, nous échapperons à ces conditions désavantageuses; nous serons en effet conduits à n'utiliser que les paires de traces dont les deux partenaires, α et β, seront simultanément présents dans un même champ du microscope, parce que c'est seulement pour de telles traces que les mesures de distances sont faciles et précises. Nous verrons que dans ces paires de traces rapprochées, la proportion des paires couplées aux paires découplées est beaucoup plus grande et, par suite, beaucoup plus favorable.

7. Écartements entre traces. — Puisque nous ne savons pas reconnaître si deux traces sont ou non couplées, nous devons examiner les deux cas possibles; celui des écartements entre traces couplées et celui des écartements entre traces découplées.

1° *Écartements entre traces couplées.* — Nous avons vu : 1° que l'intervalle de temps qui sépare les émissions de deux rayons couplés est égal à la durée de vie τ d'un atome A'; 2° que deux rayons couplés sont émis à partir d'un même point S de la source; si donc celle-ci se déplace d'un mouvement uniforme de vitesse v, le point S s'est déplacé pendant le temps τ d'une longueur $SS' = v\tau$. Un cas remarquable est celui où les deux rayons émis respectivement en S et S' sont parallèles (*fig.* 1); dans ce cas, l'écartement $R = pp'$ des origines de leurs traces est égal à SS' et l'on a la relation

$$R = v\tau. \qquad (1)$$

Cette relation où v est mesurable, fournirait la durée de vie τ d'un atome particulier par une mesure de l'écartement R des origines des traces.

Il n'existe malheureusement pas de corrélation angulaire entre les directions d'émission de deux rayons couplés; on doit donc considérer qu'ils sont émis au hasard en direction et que, par suite, le cas du parallélisme est exceptionnel.

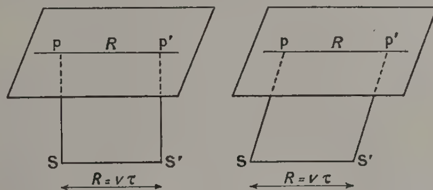


Fig. 1.

On pourrait songer, afin de pouvoir utiliser la relation (1), à ne laisser parvenir à la plaque que des rayons parallèles ou très sensiblement parallèles; mais, une telle canalisation par diaphragme devrait être extrêmement étroite en raison de la dimension microscopique des écartements à mesurer.

La probabilité d'émission d'un premier rayon à l'intérieur du très petit angle solide Δω choisi serait $\frac{\Delta\omega}{4\pi}$; la probabilité, indépendante de la première, pour que le rayon couplé soit émis dans le même angle solide serait aussi $\frac{\Delta\omega}{4\pi}$, par suite la probabilité pour que deux rayons couplés traversent le diaphragme imposé serait $\left(\frac{\Delta\omega}{4\pi}\right)^2$, c'est-à-dire extrêmement faible.

On est donc obligé de renoncer à toute canalisation : les rayons couplés Sp et S'p' seront donc très généralement de directions différentes (*fig.* 2).

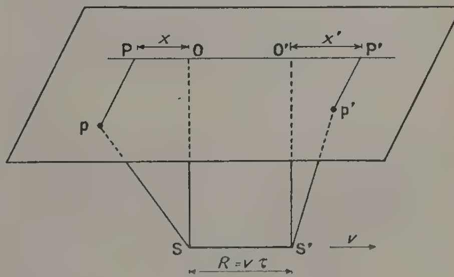


Fig. 2.

Si, comme nous l'avons supposé, on sait discerner la trace p du premier rayon (qui sera, par exemple, un rayon α), de la trace p' d'un second rayon (par exemple β), on pourra mesurer « en valeur algébrique » le segment $M = \overline{PP'}$ correspondant aux projections orthogonales des origines p et p' des

traces sur un axe parallèle à la vitesse et orienté comme elle.

Dans tous les cas de figure, on a

$$\overline{PP'} = \overline{OP'} - \overline{OP} = \overline{OO'} + \overline{O'P'} - \overline{OP}. \qquad (2)$$

Les segments $\overline{OP}$ et $\overline{O'P'}$ sont ce que nous appellerons les « écarts directionnels », dont les valeurs algébriques seront désignées par

$$X = \overline{OP} \qquad \text{et} \qquad X' = \overline{O'P'}.$$

Le déplacement $\overline{SS'} = \overline{OO'}$ de la source pendant l'intervalle de temps τ qui sépare les deux émissions couplées sera appelé « écartement réel » et nous poserons : $R = v\tau$. Enfin, nous appellerons « écartement apparent » le segment expérimentalement mesurable $M = \overline{PP'}$.

Avec ces notations, la relation (2) s'écrit

$$M = R + X' - X; \qquad (2')$$

nous l'utiliserons constamment.

2° *Écartements entre traces découplées.* — Deux traces découplées sont, par définition, deux traces p et p′ dues respectivement à un rayon α et à un rayon β non couplés et qui, par suite, proviennent de deux points différents de la source.

Soient (*fig.* 3), S_1 et S_2 les positions de ces points à l'instant t de l'émission du rayon α; soit Δt l'intervalle de temps (positif ou négatif), qui a séparé l'émission du rayon α de celle du rayon β; soient S'_1 et S'_2 les positions des points sources à l'instant $t + \Delta t$, l'on a

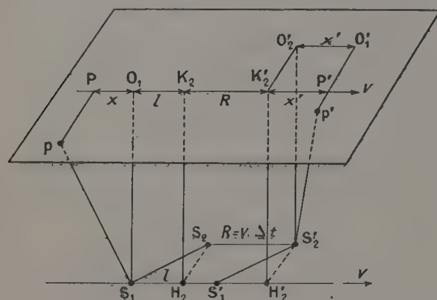


Fig. 3.

$$\overline{S_1S'_1} = \overline{S_2S'_2} = v\,\Delta t.$$

Soient, sur un axe parallèle à la vitesse et orienté comme elle : l la projection du segment $\overline{S_1S_2}$, $R = v\,\Delta t$ l'écartement réel, $X = \overline{O_1P}$ et $X' = \overline{O'_2P'_2}$ les écarts directionnels des rayons α et β, enfin $M = PP'$ l'écartement apparent mesurable des traces, on voit que

$$M = l + R + X' - X. \qquad (3)$$

Cette relation, relative aux traces découplées, ne diffère de celle (2′) relative aux traces couplées que par la présence de l et aussi par le fait que Δt et, par suite, R peuvent être positifs ou négatifs, tandis que τ et, par suite, $v\tau$ sont toujours positifs,

8. **Répartition des écartements apparents.** — Les écartements apparents $\overline{PP'}$, correspondant à deux traces p et p′ sont les seuls que nous puissions expérimentalement mesurer et ces mesures peuvent être faites en valeurs algébriques puisque nous savons distinguer une trace α d'une trace β et que nous connaissons dans le cas de deux rayons couplés la nature du premier rayon émis dont la trace est désignée par p.

Comme nous l'avons déjà fait remarquer, il n'est pas possible de reconnaître si une association d'une trace α et d'une trace β est couplée ou non; nous sommes donc conduit à essayer de déterminer théoriquement la loi « globale » de répartition de tous les écartements apparents entre toutes les associations d'une trace α et d'une trace β, c'est-à-dire que si nous désignons par M un écartement apparent quelconque, nous nous proposons de déterminer la fonction $f(M)$ telle que; sur un grand nombre n d'écartements, le nombre probable dn_M de ceux qui sont compris entre deux valeurs voisines M et $M + dM$ soit donné par la relation

$$dn_M = n\,f(M)\,dM. \qquad (4)$$

La courbe représentant la fonction $f(M)$, courbe de répartition, pourra être tracée expérimentalement à partir des mesures portant sur un grand nombre n d'écartements apparents entre une trace α et une trace β.

Nous nous sommes proposé de déterminer par voie théorique cette courbe de répartition. Nous verrons que les résultats de cette étude conduisent à une utilisation simple de la courbe expérimentale pour déterminer la vie moyenne.

Comme point de départ de l'étude théorique, nous remarquons que sur un grand nombre n d'écartements apparents, il s'en trouve des nombres $n_C = Kn$ et $n_D = (1 - K)\,n$ qui sont respectivement des écartements couplés et des écartements découplés.

Si l'on peut déterminer le coefficient K d'une part et, par voie théorique, la courbe de répartition des écartements couplés, c'est-à-dire la fonction $f_C(M)$ telle que

$$dn_C = n_C\,f_C(M)\,dM$$

et celle des écartements découplés, c'est-à-dire la fonction $f_D(M)$ telle que

$$dn_D = n_D\,f_D(M)\,dM,$$

nous pourrons déterminer la loi de répartition relative à l'ensemble des écartements; en effet

$$dn = dn_C + dn_D$$

ou

$$dn = n[Kf_C(M) + (1-K)f_D(M)]\,dM,$$

d'où il résulte que

$$f(M) = Kf_C(M) + (1-K)f_D(M).$$

Nous sommes donc conduits à rechercher séparément la loi de répartition des écartements couplés et celle des écartements découplés.

Nous aurons besoin pour cela de connaître l'expression de la probabilité de réalisation d'un écart directionnel « global » $\Delta = X' - X$ compris entre deux valeurs voisines Δ et $\Delta + d\Delta$.

9. **Loi de répartition des écarts directionnels** X. — Si nous désignons par dn_X le nombre des écarts directionnels compris entre deux valeurs voisines X et $X + dX$, lorsque n rayons sont émis vers la plaque, la loi de répartition est définie par la fonction $f(X)$ telle que

$$dn_X = nf(X)\,dX. \qquad (1)$$

Pour déterminer $f(X)$, nous remarquons que les n rayons étant supposés émis au hasard en direction vers la plaque, le nombre de ceux qui sont émis en moyenne dans un angle solide $d\omega$ vers un élément de surface $d\Sigma = dX\,dY$ est

$$dp = n\frac{d\omega}{2\pi},$$

mais on a

$$d\omega = \frac{h}{(X^2+Y^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\,dX\,dY,$$

d'où

$$dp = n\frac{h}{2\pi}\frac{dX\,dY}{(X^2+Y^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Le nombre de traces contenues dans la bande ABA'B' de la plaque (*fig.* 4), d'abscisse X, de largeur dX et de hauteur indéfinie, c'est-à-dire le nombre dn_X de traces présentant un écart directionnel compris entre X et $X + dX$ est donc

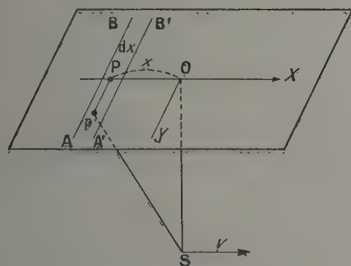


Fig. 4.

$$dn_X = n\frac{h}{2\pi}dX\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dY}{(Y^2+X^2+h^2)^{\frac{3}{2}}},$$

soit

$$dn_X = n\frac{h}{\pi}\frac{dX}{X^2+h^2} \qquad (2)$$

qui est la loi de répartition cherchée.

Posons $x = \frac{X}{h}$, la relation (2) devient

$$dn_x = n\frac{1}{\pi}\frac{dx}{1+x^2}. \qquad (3)$$

La courbe I (*fig.* 5) représente les variations de $\frac{1}{dx}\frac{dn_x}{n}$ en fonction de x.

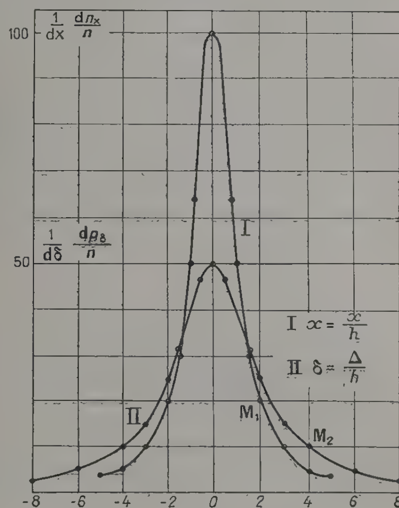


Fig. 5.

On remarque que, comme il était à prévoir, la loi de répartition est symétrique, c'est-à-dire que les nombres des écarts directionnels égaux et de signes contraires sont égaux et que les écarts directionnels sont d'autant plus nombreux qu'ils sont plus petits : déjà pour $x = 1$, c'est-à-dire pour $X = h$, leur nombre n'est plus que la moitié du maximum $\frac{n}{\pi}$ relatif à $X = 0$.

10. **Loi de répartition de l'écart directionnel global.** — Nous appelons écart directionnel global relatif à une paire de rayons et nous désignons par Δ la différence algébrique $\Delta = X' - X$ des écarts directionnels des deux rayons.

Si nous désignons par dn_Δ le nombre des paires de rayons pour lesquelles l'écart directionnel global est compris entre deux valeurs voisines Δ et $\Delta + d\Delta$, lorsque n paires de rayons sont émises vers la plaque, la loi de répartition est définie par une fonction $f(\Delta)$ telle que

$$dn_\Delta = nf(\Delta)\,d\Delta.$$

Nous nous proposons de déterminer $f(\Delta)$. Nous

supposons que les directions d'émission des deux rayons sont sans corrélation l'une avec l'autre et que, pour chaque rayon, l'émission se fait au hasard en direction et qu'elle est, en moyenne, isotrope.

Les probabilités de réalisation d'un écart directionnel compris entre X et $X + \mathrm{d}X$ pour le premier rayon et d'un écart directionnel compris entre X' et $X' + \mathrm{d}X'$ pour le second rayon sont donc indépendantes; elles sont données par la formule (2) du paragraphe précédent.

Sur n groupes de deux rayons le nombre $\mathrm{d}^2 p_{XX'}$ de ceux qui présentent un écart directionnel X pour le premier et un écart directionnel X' pour le second est donc

$$\mathrm{d}^2 p_{XX'} = n \frac{h^2}{\pi^2} \frac{\mathrm{d}X}{X^2 + h^2} \frac{\mathrm{d}X'}{X'^2 + h^2}.$$

Soit $\Delta = X' - X$, l'écart directionnel global; effectuant le changement de variable : $X' = X + \Delta$, le nombre de groupes de deux rayons qui présentent simultanément un écart directionnel compris entre X et $X + \mathrm{d}X$ pour le premier et un écart directionnel global compris entre Δ et $\Delta + \mathrm{d}\,\Delta$ est

$$\mathrm{d}^2 p_{X\Delta} = n \frac{h^2}{\pi^2} \frac{\mathrm{d}X}{X^2 + h^2} \frac{\mathrm{d}\Delta}{(X + \Delta)^2 + h^2}$$

Le nombre de groupes de deux rayons qui présentent un écart directionnel global compris entre Δ et $\Delta + \mathrm{d}\,\Delta$ pour une valeur quelconque de X, comprise entre moins et plus l'infini est

$$\mathrm{d}p_\Delta = n \frac{h^2}{\pi^2} \mathrm{d}\Delta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}X}{(X^2 + h^2)[(X + \Delta)^2 + h^2]}, \quad (1)$$

soit, par intégration,

$$\mathrm{d}p_\Delta = n \frac{2h}{\pi} \frac{\mathrm{d}\Delta}{4h^2 + \Delta^2} \quad (2)$$

qui est l'expression de la loi de répartition cherchée.

Prenons comme précédemment pour unité de longueur la distance h de la source à la plaque et posons $\frac{\Delta}{h} = \delta$, la loi de répartition prend la forme simple

$$\mathrm{d}p_\delta = \frac{n}{2\pi} \frac{\mathrm{d}\delta}{1 + \left(\frac{\delta}{2}\right)^2}. \quad (3)$$

La courbe II de la figure 5, construite à la même échelle que la courbe I met en évidence l'étalement plus grand par effet directionnel global.

On remarquera que tout point M_2 de la courbe II, dont l'abscisse est double de celle d'un point M_1 de la courbe I, a une ordonnée moitié de celle de M_1.

11. Loi de répartition des écartements non couplés. — Nous avons établi (§ 7) la relation

$$M = l + R + X' - X \quad (1)$$

pour les écartements non couplés.

Rappelons que :

1° M représente la valeur algébrique d'un écartement apparent $\overline{\mathrm{PP}'}$ entre les projections P et P' sur l'axe des vitesses des origines des traces α et β dans l'hypothèse où c'est le rayon α qui est émis lors de la formation d'un atome du corps S' et un rayon β lors de sa désintégration;

2° que l représente la projection sur l'axe des vitesses du segment $\overline{S_1S_2}$ des points de la source, origines respectivement du rayon α et du rayon β;

3° que $R = v\,t$; $t = t_\alpha - t_\beta$ étant l'intervalle de temps positif ou négatif, qui a séparé l'émission à l'instant t_α du rayon α de celle, à l'instant t_β, du rayon β.

En désignant, comme précédemment, par

$$\Delta = X' - X$$

l'écart directionnel global, la relation (1) s'écrit

$$M = l + vt + \Delta. \quad (2)$$

Nous nous proposons de déterminer la loi de répartition des écartements apparents découplés, c'est-à-dire la fonction $f(M)$, telle que sur un grand nombre n_D de tels écartements, le nombre $\mathrm{d}n_M$ de ceux qui sont compris entre deux valeurs voisines M et $M + \mathrm{d}M$ soit donné par la relation

$$\mathrm{d}n_M = n_\mathrm{D} f(M)\,\mathrm{d}M. \quad (3)$$

Il semble *a priori* que cette fonction de répartition $f(M)$ puisse dépendre de la forme, des dimensions de la source et de la distribution des atomes radioactifs sur sa surface; nous nous proposons de montrer d'abord que la loi de répartition est « indépendante » de ces différents facteurs et qu'elle ne serait pas modifiée si l'on rassemblait en un seul et même point tous les atomes radioactifs qui la composent.

Si nous démontrons cette propriété, il nous suffira de trouver la loi de répartition relative à une source ponctuelle de même activité que celle de la source étendue.

Montrons d'abord que l'on ne modifie pas la loi de répartition des écartements apparents découplés en remplaçant une source située dans un plan parallèle à la plaque et étendue en surface par une source de même activité et linéaire suivant la vitesse.

Cette propriété résulte de l'expression (2) : l'écartement apparent M ne dépend pas, en effet, de la position des atomes S_1 et S_2, émetteurs respectivement du rayon α et du rayon β, mais seulement de la projection $l = \overline{H_1H_2}$ du segment $\overline{S_1S_2}$ sur un axe parallèle à la vitesse.

Le transport éventuel des atomes S_1 et S_2 respectivement en H_1 et H_2 n'affecterait d'ailleurs en rien la probabilité *a priori* d'émission de rayons, ni dans le temps, ni en directions; il s'ensuit que la proba-

bilité *a priori* d'obtenir tel écartement particulier ne serait pas modifiée par ce transport.

La probabilité, *a priori*, de tous écartements étant la même avant ou après le transport éventuel de chaque atome en sa projection sur l'axe des vitesses, il en résulte que, pour un grand nombre d'écartements, la loi de répartition sera la même pour la source étendue en surface et pour la source linéaire constituée par la projection de tous les atomes de la source sur un axe parallèle à la vitesse.

Montrons maintenant qu'une telle source linéaire peut être remplacée par une source ponctuelle de même activité.

En effet, nous remarquons d'une part que la probabilité d'émission d'un rayon dans un angle solide $d\omega$ est « indépendante » de la présence des autres atomes radioactifs qui constituent la source; d'autre part la probabilité de cette émission entre deux instants t et $t + dt$ est proportionnelle à dt, mais « indépendante » de l'instant t, début de l'intervalle.

Il en résulte que l'on ne change pas la probabilité *a priori* d'obtenir un rayon S_1p_1 par un transport éventuel à partir de S_1 de l'atome émetteur A_1 en un point O tel que $OS_1 = y_1$ (*fig.* 6), car la probabilité *a priori* de l'émission d'un rayon par l'atome A_1 entre les instants t_1 et $t_1 + dt$ est la même qu'entre les instants $t_1 + \frac{y_1}{v}$ et $\left(t_1 + \frac{y_1}{v}\right) + dt$ et cela quel que soit t_1.

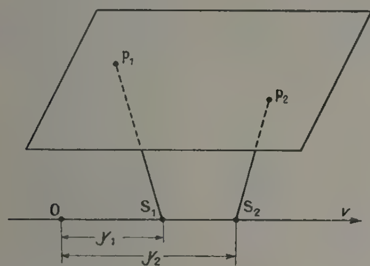


Fig. 6.

De même la probabilité *a priori* d'obtenir un rayon β suivant S_2p_2 est la même, que l'atome émetteur A_2 soit maintenu en S_2 ou que l'on envisage son transport éventuel préalable au point O tel que $OS_2 = y_2$ puisque l'émission a autant de chances de se produire soit à partir de S_2 entre les instants t_2 et $t_2 + dt$, soit de O et dans la même direction entre les instants $t_2 + \frac{y_2}{v}$ et $\left(t_2 + \frac{y_2}{v}\right) + dt$ et ceci quel que soit t_2, puisque O entraîné avec la vitesse v sera parvenu en S_2 à l'instant $t_2 + \frac{y_2}{v}$.

Ainsi, la probabilité *a priori* pour que se réalise un écartement quelconque n'est pas modifiée par un transport éventuel préalable en un même point O de deux atomes origines des rayons relatifs à cet écartement.

On peut donc envisager le transport éventuel de tous les atomes d'une source linéaire en un point quelconque O sans modifier la probabilité *a priori* de tout écartement entre traces.

Il en résulte que, pour un grand nombre d'écartements, la loi de répartition sera la même pour une source étendue que pour une source ponctuelle, contenant le même nombre d'atomes, c'est-à-dire de même activité : il nous suffit donc de rechercher cette loi de répartition dans l'hypothèse d'une source ponctuelle.

Pour une source ponctuelle, la relation (2) se simplifie : l'écartement apparent M entre deux traces (l'une α et l'autre β), produites par deux rayons non couplés R (par exemple α), émis à l'instant t_α et l'autre R′ (par exemple β), émis à l'instant t_β dont les émissions sont séparées par un intervalle de temps $t = t_\beta - t_\alpha$ (positif ou négatif), est donné par la relation

$$M = vt + \Delta. \qquad (4)$$

Nous supposerons de plus que les rayons R sont émis par une substance S à vie longue (par rapport à la durée de l'irradiation de la plaque), et les rayons R′ par une substance S′, à vie brève, en équilibre radioactif avec la substance S.

En vue de trouver la loi de répartition des écartements apparents M entre traces non couplées, proposons-nous d'abord de déterminer la loi de répartition des intervalles de temps qui séparent deux émissions découplées, c'est-à-dire la fonction $f(t)$ telle que, sur un grand nombre n_D d'association de deux rayons découplés (dont l'un α et l'autre β), le nombre dn_t de celles dont les rayons sont émis avec un intervalle de temps compris entre deux valeurs voisines t et $t + dt$, soit donné par

$$dn_t = n_D f(t)\,dt. \qquad (5)$$

Cette loi de répartition étant supposée trouvée, comme nous connaissons (§ 10) la loi de répartition des écarts directionnels globaux

$$dp_\Delta = n\,\frac{2h}{\pi}\,\frac{d\Delta}{4h^2 + \Delta^2},$$

nous pourrons en utilisant la relation

$$M = vt + \Delta$$

par le changement de variable $t = \frac{M - \Delta}{v}$, trouver la loi de répartition des écartements apparents.

Soit donc à trouver la loi de répartition des intervalles d'émission t entre un rayon α et un rayon β découplés.

Prenons comme origine des temps l'instant d'émission du premier rayon α qui frappe la plaque et soit T l'instant d'émission du dernier rayon β qui

frappe la plaque; T mesure la durée d'exposition de la plaque au rayonnement de la source.

Si L désigne la dimension de la plaque suivant la vitesse v de la source, on a aussi, sensiblement, $T = \frac{L}{v}$ et l'on remarque que T est l'intervalle de temps maximum entre une émission α et une émission β dont les traces sont portées sur la plaque.

Expérimentalement, nous ne savons mesurer avec précision et, par suite, nous ne mesurerons que des écartements apparents entre une trace α et une trace β qui se trouvent « simultanément » dans un même champ du microscope, c'est-à-dire que nous ne mesurerons que des écartements apparents inférieurs en valeur absolue au diamètre d du champ. Pour tous les écartements mesurés sera donc satisfaite la condition $|M| \leqq d$.

Nous nous proposons de montrer que de cette condition il résulte que pour tous les écartements mesurés, l'intervalle t d'émission des rayons correspondants est une fraction négligeable du temps d'exposition T.

En effet, il est facile de se rendre compte que sur un grand nombre n d'écarts directionnels, le nombre de ceux qui sont supérieurs à 10 h n'est qu'une faible fraction de n.

On peut pressentir ce résultat en examinant la courbe de répartition des écarts directionnels figure 5; de façon plus précise, le nombre des écarts directionnels compris entre Δ et $\Delta + \mathrm{d}\Delta$ est

$$\mathrm{d}p_\Delta = n\frac{2h}{\pi}\frac{\mathrm{d}\Delta}{4h^2 + \Delta^2};$$

le nombre de ceux qui sont supérieurs à une valeur l est

$$\int_l^\infty \mathrm{d}p_\Delta = n\frac{2h}{\pi}\int_l^\infty \frac{\mathrm{d}\Delta}{4h^2 + \Delta^2} = n\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{l}{2h}\right)$$

pour $l = 10\,h$, on trouve

$$p = \frac{6}{100}n,$$

c'est-à-dire que 6 pour 100 seulement des écarts directionnels sont supérieurs à 10 h.

En ne mesurant donc que les écartements apparents entre traces contenues simultanément dans un même champ, c'est-à-dire que les écartements apparents tels que $|M| \leqq d$, il résulte de la relation (4) d'après laquelle

$$t = \frac{|M| + |\Delta|}{v}$$

que nous ne nous intéressons pratiquement qu'aux couples de rayons dont l'intervalle d'émission t est inférieur ou au plus égal à

$$t_m = \frac{d + 10\,h}{v}.$$

Or dans les conditions des mesures,

$$d \leqq 200\ \mu \quad \text{ou} \quad d \leqq 2.10^{-2}\ \text{cm}$$

et

$$h \leqq 6.10^{-2}\ \text{mm} \quad \text{ou} \quad 10\,h \leqq 6.10^{-2}\ \text{cm};$$

par suite

$$t_m = \frac{8.10^{-2}}{v},$$

cependant la durée T d'exposition de la plaque est $T = \frac{L}{v}$ et L est de l'ordre de 4 cm; $\frac{t_m}{T}$ est donc de l'ordre de 2/100e.

Cherchons donc la loi de répartition des intervalles d'émission de deux rayons non couplés en nous limitant à des intervalles $t \ll T$. Soient $2p$ le nombre de rayons α et aussi le nombre de rayons β émis vers la plaque pendant le temps d'exposition T; nous avons vu (§ 6) que, en associant chaque rayon α à chaque rayon β, l'on pouvait former au total $n = 4p^2$ associations, parmi lesquelles la valeur la plus probable du nombre d'associations couplées était $n_C = p$ et la valeur la plus probable du nombre des associations non couplées

$$n_D = n - n_C, \qquad \text{soit} \quad n_D = 4p^2 - p.$$

D'ailleurs, si a représente l'activité vers la plaque de la source de rayons α et donc celle de la source de rayons β qui est en équilibre radioactif, on a

$$2p = aT.$$

Cherchons le nombre $\mathrm{d}n_t$ des paires découplées formées de rayons dont l'intervalle d'émission est compris entre deux valeurs voisines t et $t + \mathrm{d}t$, t étant négligeable devant T.

Nous remarquons que l'on peut partager les $2p$ rayons α en deux groupes : un premier groupe est formé (*voir* § 6) des p rayons α dont chacun possède son partenaire de couple parmi les $2p$ rayons β; l'un quelconque R_α de ces rayons, émis entre les instants t_α et $t_\alpha + \mathrm{d}t_\alpha$ peut donc s'associer à $2p - 1$ rayons pour donner $2p - 1$ paires découplées.

Les émissions de ces $2p - 1$ rayons sont, en moyenne et de part et d'autre de l'instant t_α, uniformément réparties entre les instants 0 et T; par suite, à la condition que $t_\alpha + t \leqq T$, entre les instants $t_\alpha + t$ et $(t_\alpha + t) + \mathrm{d}t$ sont donc émis, en moyenne, $\frac{2p-1}{T}\mathrm{d}t$ rayons β dont les émissions sont séparées de celle d'un des rayons R_α par un intervalle compris entre t et $t + \mathrm{d}t$.

La condition $t_\alpha + t \leqq T$ est satisfaite pour toutes les valeurs de $t_\alpha \leqq T - t$, c'est-à-dire, puisque t est négligeable devant T, pour pratiquement toutes les valeurs de t_α comprises entre 0 et T, c'est-à-dire pour tous les p rayons α du groupe considéré.

Chaque rayon α de ce groupe donnant $\frac{2p-1}{T}\mathrm{d}t$

associations, les p rayons du groupe en donneront $p\frac{2p-1}{T}\,dt$.

Un deuxième groupe de rayons α est lui aussi formé de p rayons mais dont aucun ne possède de partenaire de couple parmi les $2p$ rayons β; par un raisonnement analogue à celui employé pour les rayons du premier groupe, on montre que ces p rayons fourniront $p\frac{2p}{T}\,dt$ associations de rayons dont les émissions sont séparées par un intervalle de temps compris entre t et $t + dt$, à la condition comme précédemment que t soit négligeable devant T, ce qui est le cas pour 94 pour 100 des associations de rayons dont les traces sont contenues simultanément dans un même champ.

Au total, les deux groupes de rayons fournissent

$$dn_t = \left(p\frac{2p-1}{T} + p\frac{2p}{T}\right)dt = \frac{4p^2-1}{T}\,dt$$

ou

$$dn_t = n_D\frac{1}{T}\,dt. \qquad (6)$$

Cette relation (6) est l'expression de la loi de répartition cherchée des intervalles de temps entre émissions rapprochées ($t \ll T$) de deux rayons découplés.

On remarque que dn_t est indépendant de t, c'est-à-dire que les intervalles d'émissions découplées très petits sont également probables.

Proposons-nous maintenant de déterminer la loi de répartition des écartements des traces correspondant aux paires de rayons découplés en nous limitant à des écartements inférieurs ou au plus égaux en valeur absolue au diamètre d du champ.

Nous remarquons que chacun des rayons d'un couple est émis au hasard en direction; or, la probabilité d'un écart directionnel global compris entre deux valeurs voisines Δ et $\Delta + d\Delta$ est $\frac{2h}{\pi}\,\frac{d\Delta}{4h^2+\Delta^2}$, il en résulte que sur les dn_t écatements de traces correspondant aux dn_t paires de rayons, le nombre de ceux pour lesquels « simultanément » l'intervalle d'émission est compris entre t et $t + dt$ (avec $t \ll T$) et l'écart directionnel global entre Δ et $\Delta + d\Delta$ (avec $|\Delta| \leqq 10\,h$) est

$$d^2 n_{t,\Delta} = n_D\frac{1}{T}\,dt\,\frac{2h}{\pi}\,\frac{d\Delta}{4h^2+\Delta^2}.$$

En tenant compte de la relation

$$M = vt + \Delta$$

et en faisant le changement de variable qui en découle

$$t = \frac{M-\Delta}{v},$$

on obtient pour le nombre $d^2 n_{M,\Delta}$ des écartements apparents compris entre M et $M + dM$ et pour lesquels l'écart directionnel global est compris entre Δ et $\Delta + d\Delta$ l'expression

$$d^2 n_{M,\Delta} = n_D\frac{1}{vT}\,dM\,\frac{2h}{\pi}\,\frac{d\Delta}{4h^2+\Delta^2}.$$

Le nombre des écartements apparents compris entre M et $M + dM$ pour toutes valeurs de Δ comprises entre $-10\,h$ et $+10\,h$ est

$$dn_M = n_D\frac{1}{vT}\,\frac{2h}{\pi}\int_{10h}^{+10h}\frac{d\Delta}{4h^2+\Delta_2}\,dM,$$

soit

$$dn_M = n_D\frac{0{,}87}{vT}\,dM.$$

Telle est la loi de répartition des écartements apparents entre traces découplées inférieurs à d en valeur absolue.

On voit que le nombre des écartements compris entre deux valeurs voisines M et $M + dM$ est « indépendant » de M : « la courbe de répartition des écartements apparents découplés des associations de traces contenues dans un même champ du microscope est une droite parallèle à l'axe des M ».

Nous aurons à utiliser ce résultat très important.

Nous allons maintenant nous occuper de rechercher la loi de répartition des écartements « couplés ».

Nous avons établi au paragraphe 7 la relation

$$M = R + X' - X,$$

dans laquelle R représente la valeur algébrique d'un écartement apparent entre deux traces couplées, $R = v\tau$ un segment positif que nous avons appelé écartement réel, τ désigne l'intervalle de temps qui sépare la formation (avec émission d'un rayon α ou β) de la désintégration (avec émission d'un rayon β ou α) d'un atome A' à vie brève.

Comme précédemment, nous appelons écart directionnel global Δ la différence $X' - X$.

Nous nous proposons de déterminer la loi de répartition des écartements apparents couplés, c'est-à-dire la fonction $f_C(M)$, telle que sur un grand nombre n_C d'écartements couplés, pris au hasard, le nombre probable dn_M de ceux pour lesquels l'écartement est compris entre deux valeurs voisines M et $M + dM$ soit donné par la formule

$$dn_M = n_C f_C(M)\,dM.$$

Nous avons donné (§ 10) la loi de répartition des écarts directionnels globaux; nous allons chercher la loi de répartition des écartements réels, puis nous essaierons, en utilisant la relation $M = R + \Delta$ d'obtenir la loi de répartition des écartements apparents couplés.

12. **Loi de répartition des écartements réels couplés.** — Nous avons établi (§ 3) la loi de répartition des intervalles d'émissions entre deux rayons

couplés

$$dn_\tau = n_c \, e^{-\frac{\tau}{\theta}} d\tau. \qquad (1)$$

A chaque paire de rayons couplés dont les émissions sont séparées par un temps τ correspond, si les beux rayons sont dirigés vers la plaque, un écartement réel

$$R = v\tau \qquad (2)$$

de deux traces couplées. On remarque que la probabilité pour que les émissions de deux rayons couplés soient séparées par un intervalle de temps compris entre τ et $\tau + d\tau$ est la même que les rayons soient ou non émis tous deux vers la plaque.

A l'intervalle moyen de filiation θ (qui est aussi la vie moyenne de la substance de filiation), nous pouvons faire correspondre un écartement réel moyen défini par

$$\bar{R} = v\theta. \qquad (3)$$

Des relations (1), (2) et (3) appliquées aux couples de rayons émis par la plaque, on déduit

$$dn_R = n_c \frac{1}{\bar{R}} e^{-\frac{R}{\bar{R}}} dR \qquad (4)$$

qui est la loi de répartition des écartements réels entre traces couplées, formule dans laquelle n_c représente un nombre grand d'écartements couplés et dn_R le nombre de ceux pour lesquels l'écartement réel est compris entre R et $R + dR$. Cette loi de répartition est représentée figure 7; on a porté en

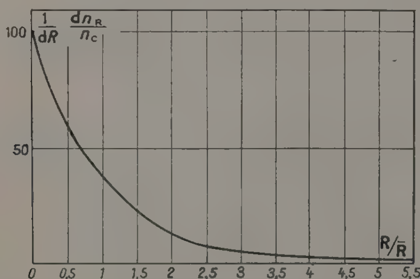


Fig. 7.

ordonnée la probabilité $\frac{1}{dR}\frac{dn_R}{n_c}$ de réalisation d'un écartement réel compris entre R et $R + dR$ et, en abscisses, le rapport $\frac{R}{\bar{R}}$, c'est-à-dire la mesure d'un écartement réel avec comme unité l'écartement réel moyen.

La courbe met en évidence la prédominance des écartements courts : moins de 1 pour 100 sont supérieurs à $5\bar{R}$ ou $5 v\theta$.

13. Loi de répartition des écartements apparents couplés. — D'après ce qui précède, sur n_c écartements apparents couplés, le nombre dn_R de ceux pour lesquels l'écartement réel est compris entre R et $R + dR$ est

$$dn_R = n_c \frac{1}{\bar{R}} e^{-\frac{R}{\bar{R}}} dR. \qquad (1)$$

Par ailleurs, chacun des rayons d'un couple est émis au hasard en direction. Dans ces conditions, nous avons vu que la probabilité d'un écart directionnel global compris entre deux valeurs voisines Δ et $\Delta + d\Delta$ est

$$\frac{2h}{\pi} \frac{d\Delta}{4h^2 + \Delta^2}. \qquad (2)$$

Le nombre des couples pour lesquels, simultanément, l'écartement réel sera compris entre R et $R + dR$ et l'écart directionnel global entre Δ et $\Delta + d\Delta$ est donc

$$d^2 n_{R,\Delta} = n_c \frac{2h}{\pi} \frac{1}{\bar{R}} e^{-\frac{R}{\bar{R}}} dR \frac{d\Delta}{4h_2 + \Delta^2}. \qquad (3)$$

Mais

$$M = R + \Delta. \qquad (4)$$

Effectuons le changement de variable : $\Delta = R - M$, le nombre d'écartements couplés pour lesquels, simultanément, l'écart réel est compris entre R et $R + dR$ et l'écartement apparent entre M et $M + dM$ est

$$d^2 n_{M,R} = n_c \frac{2h}{\pi} \frac{1}{\bar{R}} dM \frac{e^{-\frac{R}{\bar{R}}} dR}{4h^2 + (M - R)^2}, \qquad (5)$$

d'où, par intégration entre les limites de variation de R,

$$dn_M = n_c \frac{2h}{\pi} \frac{1}{\bar{R}} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{R}{\bar{R}}} dR}{4h^2 + (M - R)^2} dM. \qquad (6)$$

Posons :

$$G(M, h, \bar{R}) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{R}{\bar{R}}} dR}{4h^2 + (M - R)^2}. \qquad (7)$$

La loi de répartition cherchée a comme expression

$$dn_M = n_c \frac{2h}{\pi} \frac{1}{\bar{R}} G(M, h, \bar{R}) dM. \qquad (8)$$

Le problème serait résolu si l'on savait obtenir analytiquement la fonction G; celle-ci contient deux paramètres : h et $\bar{R}$, c'est-à-dire qu'il existe un double réseau de courbes de répartition, suivant la valeur de la distance h de la source à la plaque et celle de l'écart réel moyen.

Faute de solution analytique, il faut intégrer graphiquement.

Pour éviter, en raison de la présence de deux paramètres, de tracer un double réseau de courbes, nous prendrons comme unité de longueur la distance h de la source à la plaque, distance qui, par construction du ciné-nucléographe, sera une donnée commune dans toutes les expériences.

Nous désignerons par r, $\bar{r}$ et m, respectivement les mesures faites avec cette unité des écartements réels, de l'écartement réel moyen et des écartements apparents : r, $\bar{r}$ et m seront des nombres sans dimensions.

La formule (7) devient

$$G(m, \bar{r}) = \frac{1}{h}\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{r}{\bar{r}}}\,dr}{4+(r-m)^2} \qquad (7')$$

si l'on pose

$$g(m, \bar{r}) = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{r}{\bar{r}}}\,dr}{4+(r-m)^2}, \qquad (9)$$

la relation (8) devient

$$dn_m = n_0 \frac{2}{\pi}\frac{1}{\bar{r}}\, g(m, \bar{r})\, dm. \qquad (8')$$

Pour chaque valeur de $\bar{r}$, cette équation et l'équation (9) définissent une courbe de répartition des écartements apparents couplés, c'est-à-dire que, pour les différentes valeurs de $\bar{r}$, on a un réseau de courbes de répartition.

Proposons-nous de construire l'une de ces courbes, correspondant à une valeur particulière de $\bar{r}$, par exemple $\bar{r} = \frac{1}{3}$.

Faute de pouvoir obtenir par intégration l'expression analytique de $g\left(m, \frac{1}{3}\right)$, on peut construire par points la courbe $g\left(m, \frac{1}{3}\right)$: il suffit de déterminer graphiquement, pour différentes valeurs de m, les valeurs de l'intégrale définie

$$\int_0^\infty \frac{e^{-3r}\,dr}{4+(r-m)^2}.$$

Pour chaque valeur de m, l'intégrale définie est égale à l'aire comprise entre la courbe C d'équation

$$y = \frac{e^{-3r}}{4+(r-m)^2}$$

et l'axe des r.

L'allure générale des courbes C est indiquée par la courbe (*fig.* 8) construite pour $m = 0$.

L'évaluation graphique des aires correspondant à différentes valeurs de m a donné les résultats inscrits dans le tableau ci-dessous :

m.	$10^5.g\left(m, \frac{1}{3}\right)$.	m.	$10^5.g\left(m, \frac{1}{3}\right)$.
— 4	1 480	0,50	8 110
— 3	2 240	0,75	7 875
— 2	3 590	1	7 270
— 1	5 815	2	4 930
0	7 870	4	1 925
0,25	8 100		

En utilisant les valeurs numériques de ce tableau, on a pu construire la courbe $g\left(m, \frac{1}{3}\right)$; cette courbe est représentée figure 9; c'est la courbe de répartition cherchée pour $\bar{r} = \frac{1}{3}$.

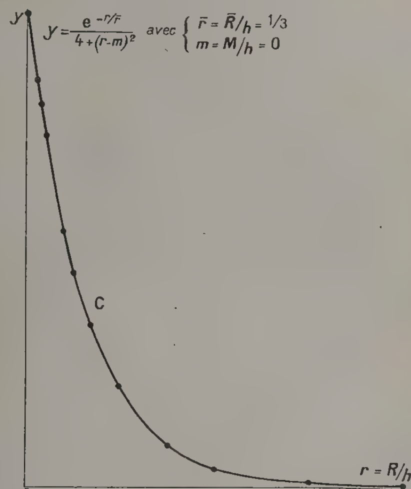


Fig. 8.

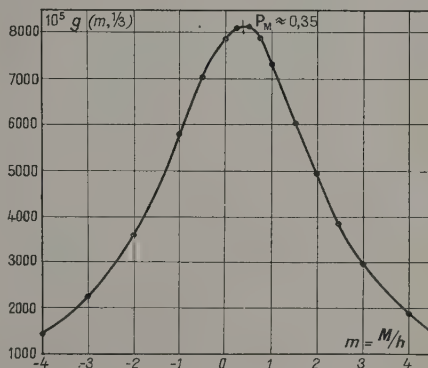


Fig. 9.

Différentes courbes de répartition, correspondant à différentes valeurs de $\bar{r}$, ont été construites par la même méthode. Toutes ces courbes ont la même allure; elles présentent toutes un maximum, ce qui indique que, pour chaque valeur de $\bar{r}$, il existe un écartement apparent le plus probable, dont nous désignerons la valeur par m_p.

Nous remarquons que l'écartement le plus probable est positif, c'est-à-dire qu'il correspond, d'après nos conventions de signes, à un segment orienté dans le sens de la vitesse de la source. Sur la courbe $g\left(m, \frac{1}{3}\right)$, on remarque en outre que l'écartement le plus probable est $m_p = 0{,}35$, valeur

voisine de $\bar{r} = \frac{1}{3}$; ce voisinage, dont on ne peut juger exactement en raison des approximations graphiques, semble devenir moins proche pour les courbes de répartition correspondant à de plus grandes valeurs de $\bar{r}$ et inversement. Par exemple sur celle qui correspond à $\bar{r} = 1$ (c'est-à-dire $\bar{R} = h$), représentée figure 10, courbe construite avec soin

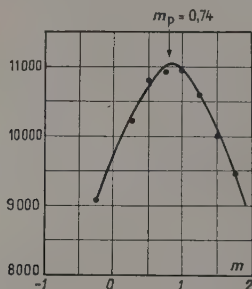


Fig. 10.

au voisinage de $m = 1$, on voit que l'écartement apparent le plus probable est $m_p = 0,74$, valeur un peu inférieure à 1.

On constate, par contre, que l'écartement le plus probable se rapproche d'autant plus de l'écartement réel moyen que celui-ci est plus petit; on pouvait d'ailleurs prévoir que dans le cas d'un écart réel moyen nul, c'est-à-dire dans le cas d'émissions simultanées et de même origine, la répartition des écartements apparents serait la même que celle des écarts directionnels qui, nous l'avons vu, présente un maximum pour $\Delta = 0$.

Il nous a paru intéressant de rechercher de façon plus précise la relation entre l'écartement le plus probable m_p, correspondant au maximum d'une courbe de répartition des écartements couplés et l'écart réel moyen $\bar{r}$, c'est-à-dire une relation telle que

$$\bar{r} = \varphi(m_p).$$

En effet, chaque ordonnée de la courbe de répartition correspondant à l'ensemble des écartements couplés et non couplés, courbe que l'on peut tracer à partir de mesures expérimentales, est la somme des ordonnées de la courbe de répartition des écartements couplés et de la courbe de répartition des écartements non couplés. Comme cette dernière, nous l'avons montré, est une droite parallèle à l'axe des m, la courbe globale de répartition « que l'on pourra obtenir expérimentalement » présentera un maximum pour la même valeur m_p que la courbe de répartition des écartements couplés. Si donc nous pouvons mettre en évidence une relation

$$r = \varphi(m_p).$$

on pourra l'utiliser pour déterminer, à partir de la valeur expérimentale m_p, la valeur $\bar{r} = \frac{v\theta}{h}$, d'où θ si h est connu,

14. Maximum des courbes de répartition des écartements couplés. — Pour préciser la position des maxima des différentes courbes de répartition correspondant aux différentes valeurs de $\bar{r}$, nous avions à rechercher, pour chaque valeur de $\bar{r}$, la valeur de m qui annule la dérivée $g'(m, \bar{r})$.

On a

$$-\frac{1}{2} g'(m, r) = \int_0^{\infty} \frac{(r-m)\, e^{-\frac{r}{\bar{r}}}}{[4 + (r-m)^2]^2}\, dr. \qquad (1)$$

Faute, ici encore, de pouvoir intégrer analytiquement, il a fallu, pour chaque valeur particulière de $\bar{r}$, construire graphiquement, pour différentes valeurs de m, les courbes C' d'équation

$$y = \frac{(r-m)\, e^{-\frac{r}{\bar{r}}}}{[4 + (r-m)^2]^2} \qquad (2)$$

et évaluer graphiquement les aires S, limiées par ces courbes et l'axe des r, puis tracer la courbe S (m) dont le point de rencontre avec l'axe des m fournit la valeur de m_p.

Ce travail a été simplifié, car nous savions que le maximum de la courbe de répartition, correspondant à une valeur particulière de $\bar{r}$, se produisait pour une valeur de m voisine de $\bar{r}$; nous avons pu alors nous contenter de ne construire, pour chaque valeur de $\bar{r}$, que trois courbes y, pour trois valeurs de m, encadrant $\bar{r}$.

La courbe C', représentée figure 11, correspond à $\bar{r} = \frac{1}{3}$ et $m = \frac{1}{3}$; elle montre l'allure générale des courbes C'; la surface S, évaluée en unités arbitraires

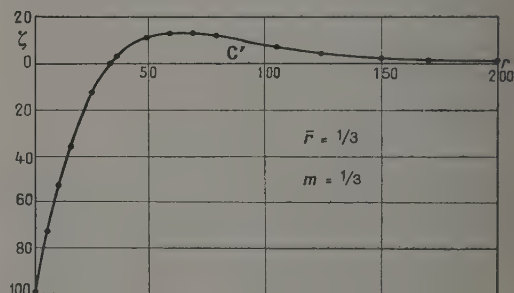


Fig. 11.

vaut -345; deux courbes analogues construites également pour $\bar{r} = \frac{1}{3}$, pour $m = 0,35$ et $m = 0,30$ donnent respectivement, à la même échelle, $S = +457$ et $S = -64$. Ces résultats ont permis de construire la partie utile de la courbe $S\left(m, \frac{1}{3}\right)$ représentée au

centre de la figure 12. L'arc de courbe tracé coupe l'axe des m au point d'abscisse $m = 0,29$ qui correspond au maximum de la courbe de répartition, relative à $\bar{r} = \frac{1}{3}$. Cette valeur de m_p est un peu différente de celle (0,35) obtenue approximativement à partir de la construction directe de la courbe de répartition donnée figure 9.

En opérant de façon semblable, nous avons déterminé les valeurs de m_p, maxima des courbes de répartition relatives à différentes valeurs de $\bar{r}$; par exemple pour $\bar{r} = 0,20$ et $0,50$ (*fig.* 12).

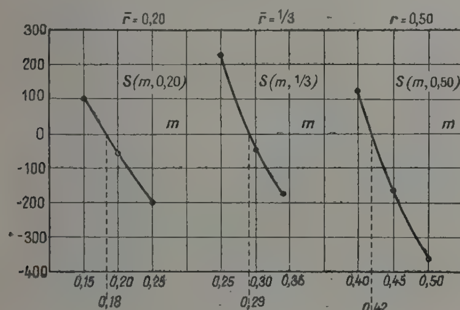


Fig. 12.

Les résultats sont rassemblés dans le tableau suivant :

$\bar{r} = \frac{\bar{R}}{h}$	0,10	0,20	0,33	0,50
	0,75	0,90	1	-
$m_p = \frac{M_p}{h}$	0,094	0,18	0,29	0,42
	0,58	0,70	0,74	-

Ces résultats ont permis de construire (*fig.* 13)

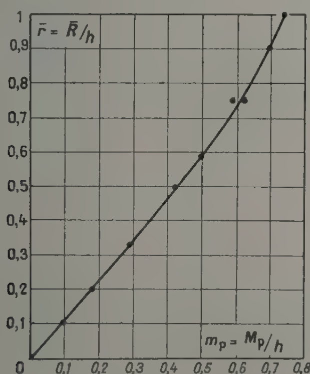


Fig. 13.

la courbe cherchée

$$\bar{r} = \varphi(m_p). \tag{3}$$

Cette courbe est très exactement représentée, dans le domaine $0 \leqq \bar{r} \leqq 1$ par la relation parabolique

$$\bar{r} = m_p + 0,357\, m_p^2. \tag{3'}$$

Si l'on tient compte de ce que $\bar{r} = \frac{\bar{R}}{h}$ et $m_p = \frac{M_p}{h}$ la formule (3′) donne

$$\bar{R} = M_p + \frac{0,357}{h} M_p^2. \tag{4}$$

15. **Principe d'une première méthode de détermination de la vie moyenne.** — Les résultats précédents nous conduisent à une première méthode de détermination de la vie moyenne θ d'une substance radioactive S′ à courte période.

La méthode n'est applicable que si les rayons qui accompagnent la formation et la désintégration de la substance sont des rayons corpusculaires et de natures différentes; tel est le cas des Ra*C*′, Th*C*′ et Ac*C*′.

On mesurera expérimentalement, en valeur algébrique, un grand nombre n d'écartements apparents entre traces β et α. Ces mesures seront faciles si l'on se limite à des écartements entre deux traces situées simultanément dans un même champ du microscope, c'est-à-dire si l'on ne mesure que des écartements apparents inférieurs en valeur absolue au diamètre d du champ. Elles permettront de construire une portion de la courbe de répartition de l'ensemble des écartements, couplés ou non couplés.

Nous savons, d'après les résultats établis au paragraphe 7, que chaque ordonnée

$$y = \frac{1}{\mathrm{d}M} \frac{\mathrm{d}n_M}{n}$$

de cette courbe expérimentale est de la forme

$$y = K y_c + (1 - K) y_D,$$

y_c et y_D étant les ordonnées de la courbe de répartition des écartements couplés et de la courbe de répartition des écartements découplés et K une constante.

Nous avons vu que la courbe $y_D(M)$ est une droite parallèle à l'axe des M et que la courbe $y_c(M)$ présente un maximum pour une certaine valeur M_p; il en résulte que, quel que soit K, la courbe expérimentale de répartition présentera, elle aussi, un maximum et « pour la même valeur de M que la courbe de répartition des écartements couplés ».

On déterminera donc le mieux possible la valeur M_p qui correspond au maximum de la courbe de répartition expérimentale. Ayant mesuré au préalable la distance h de la source à la plaque, on utilisera pour déterminer l'écartement réel moyen la relation établie

$$\bar{R} = M_p + \frac{0,357}{h} M_p^2.$$

La vitesse de déplacement de la source pendant l'irradiation de la plaque ayant été mesurée, on déterminera la vie moyenne θ par la relation

$$\bar{R} = v\theta.$$

17. Précision de la méthode. — La précision que l'on peut espérer atteindre par cette méthode dans la détermination de la vie moyenne dépend, d'une part de la précision que l'on peut atteindre dans la mesure de h et dans celle de v et, d'autre part de la précision que l'on pourra atteindre dans la détermination de M_p, c'est-à-dire de l'écartement qui correspond au maximum de la courbe expérimentale de répartition.

La question relative à la précision que l'on peut espérer atteindre dans les mesures de h et de v sera traitée dans un Mémoire prochain de Mme Odette Goussu sur l'utilisation expérimentale du cinénucléographe. Nous ne nous occuperons ici que de la question relative à la détermination de M_p.

Le choix de l'écartement qui correspond au maximum de la courbe expérimentale de répartition ne saurait être précis que si cette courbe est elle-même tracée avec précision, tout au moins au voisinage de son maximum et que si ce maximum n'est pas trop étalé. Pour que la courbe de répartition soit tracée avec précision au voisinage de son maximum, il faut que les écartements dont la valeur est voisine de M_p et par suite de R soient mesurables avec précision et que l'on en mesure un nombre aussi grand que possible en raison des fluctuations importantes lorsque les mesures portent sur un nombre insuffisamment élevé d'écartements.

Les mesures d'écartements au microscope ne pouvant guère se faire à mieux que 1 μ près, les mesures d'écartements voisins de M_p seront d'autant plus précises que M_p et par suite sensiblement R ou $v\theta$ seront plus grands, ce qui conduirait à augmenter la vitesse. Il ne semble pas cependant qu'il faille adopter trop hâtivement cette conclusion; en effet, s'il est favorable que la courbe de répartition soit tracée aussi exactement que possible, il faut par ailleurs, en vue du choix de M_p, que la courbe présente un maximum aussi pointu que possible.

Cette condition conduit à s'intéresser à la valeur de la courbure des différentes courbes de répartition (correspondant aux différentes valeurs de $\bar{r}$ et par suite de v), au maximum de chacune d'elles. Plus cette courbure sera grande, plus le maximum sera « pointu » et plus sera facile un choix exact de l'écartement le plus probable M_p qui correspond à ce maximum.

La courbe de répartition expérimentale qui correspond à tous les écartements, couplés ou non, étant obtenue par une simple translation de la courbe de répartition des écartements « couplés », nous pouvons traiter la question pour cette dernière courbe.

L'équation générale du réseau des courbes de répartition des écartements apparents couplés, établie au paragraphe 13 est :

$$\mathrm{d}n_m = n_c \frac{2}{\pi} \frac{1}{\bar{r}} g(m, \bar{r}) \,\mathrm{d}m.$$

A chaque valeur de $\bar{r} = \frac{\bar{R}}{h}$ correspond une courbe du réseau, comme $\bar{R} = v\theta$, on voit que pour une valeur déterminée de la vie moyenne, la courbe de répartition dépend à la fois de la valeur de la vitesse et de la valeur de h.

La question se pose donc du choix de v et de h de façon que la courbe de répartition correspondante présente en son maximum la plus grande courbure possible.

Si l'on remarque que l'expression $C = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ de la courbure en un point (x, y) d'une courbe $y(x)$, se réduit à y'' aux points pour lesquels y' est nul, c'est-à-dire pour les maxima et les minima de la courbe, on voit que nous sommes amené à rechercher comment varie avec $\bar{r}$, la dérivée seconde de dn_m, c'est-à-dire comment varie la quantité $\frac{1}{\bar{r}} g''_m(m, \bar{r})$ et cela pour la valeur m_p qui annule $g'_m(m, \bar{r})$.

Nous remarquons que $g''_n(m_p, \bar{r})$ représente le coefficient angulaire de la tangente à la courbe $g'_m(m, \bar{r})$ au point d'abscisse m_p.

La détermination de ces coefficients angulaires a pu être faite, approximativement, en utilisant les différentes courbes $g'_m(m, \bar{r})$ telles que celles représentées figure 12.

On a tracé pour chaque courbe la tangente en son point de rencontre avec l'axe des abscisses et déterminé le coefficient angulaire de cette tangente.

Dans le tableau ci-dessous, sont indiqués, pour différentes valeurs de $\bar{r}$ les valeurs de $\frac{1}{\bar{r}} g''_m(m_p, \bar{r})$, c'est-à-dire des nombres proportionnels à la courbure en leur sommet des courbes de répartition correspondantes.

$\bar{r} = \frac{\bar{R}}{h}$	0,33	0,50	0,75	0,80
$C \approx \frac{1}{\bar{r}} g''_m(m_p, \bar{r})$	170	130	88	73

Il ressort de ce tableau que la courbure au sommet des courbes de répartition diminue, c'est-à-dire que la position du maximum devient plus difficile à choisir, lorsque $\bar{r}$, c'est-à-dire $\frac{\bar{R}}{h}$ ou $\frac{v\theta}{h}$ augmentent et, par suite, lorsque la vitesse augmente.

En opérant donc avec de grandes vitesses, on risque davantage de commettre une erreur dans le choix de l'écartement M_p qui correspond au maximum de la courbe de répartition.

Ces considérations conduiraient donc à utiliser de faibles vitesses, puisqu'une erreur absolue plus petite sur M_p se répercute en une erreur absolue également plus petite sur $\bar{R}$.

Il n'est pas certain, toutefois, qu'en diminuant l'erreur absolue $\Delta\bar{R}$, on gagne en précision, c'est-à-dire que l'on diminue l'erreur « relative » $\frac{\Delta\bar{R}}{\bar{R}}$, puisque, en diminuant la vitesse, on diminue en même temps la valeur de $\bar{R}$ qui est égal à $v\theta$.

Il paraît difficile de pousser plus loin cette analyse : la mise en œuvre expérimentale de la méthode semble devoir permettre d'apprécier la précision qu'elle est susceptible de fournir dans la mesure d'une vie moyenne.

Remarque. — Nous terminerons cet exposé par une dernière remarque. Nous avons vu dans ce qui précède que la courbe de répartition des écartements découplés est une droite parallèle à l'axe des écartements.

S'il en est ainsi « en moyenne », c'est-à-dire si la répartition est « en moyenne » uniforme, il n'en subsiste pas moins des fluctuations de hasard qui peuvent produire des ondulations locales de cette courbe de répartition.

Si une telle fluctuation se produit autour de la valeur M_p qui est celle de l'écartement apparent le plus probable entre traces couplées, la courbe expérimentale de répartition de l'ensemble des écartements risque de ne pas présenter son maximum pour la valeur M_p.

Les fluctuations possibles de la courbe de répartition des écartements découplés auront d'autant moins d'importance que le rapport $\frac{dn_D}{dn_C}$ des nombres des écartements découplés et des écartements couplés, dans un petit intervalle dM autour de M_p, sera plus petit.

Ceci nous amène à essayer de déterminer le rapport $K = \frac{dn_D}{dn_C}$. Nous avons vu que si un nombre $n = 2p$ de rayons α et de $2p$ rayons β ont été émis vers la plaque pendant le temps T d'irradiation, c'est-à-dire si l'on a

$$2p = aT, \tag{1}$$

on a

$$n_C = p = \frac{1}{2} aT \tag{2}$$

écartements couplés et un nombre

$$n_D = 4p^2 - p = n^2 - \frac{1}{2} n,$$

soit sensiblement

$$n_D = n^2 = a^2 T^2 \tag{3}$$

si n est grand, d'écartements découplés.

Nous avons établi (§ 11) pour la loi de répartition des écartements découplés, la formule

$$dn_D = n_D \frac{1}{vT} dM$$

ou sensiblement

$$dn_D = \frac{a^2 T}{v} dM. \tag{4}$$

D'autre part, nous avons établi (§ 13) pour la lo de répartition des écartements couplés, la formule

$$dn'_C = n_C \frac{2}{\pi} \frac{1}{\bar{r}} g(m, \bar{r})\, dm, \tag{5}$$

avec

$$g(m, \bar{r}) = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{r}{\bar{r}}} dr}{4 + (r - m)^2}. \tag{6}$$

Mais on a

$$\bar{r} = \frac{\bar{R}}{h} \quad \text{et} \quad m = \frac{M}{h}. \tag{7}$$

La formule (5) devient

$$dn_C = n_C \frac{2}{\pi} \frac{1}{\bar{R}} g(m, \bar{r})\, dM. \tag{8}$$

Pour une valeur donnée de $\bar{R}$, le nombre d'écartements de traces couplées au voisinage du maximum de la courbe de répartition, maximum qui a lieu pour $m = m_p$ sera, en tenant compte de (2),

$$dn_C = aT \frac{1}{\bar{R}} g(m_p, \bar{r})\, dM \tag{9}$$

et l'on aura

$$K = \pi \frac{a}{v} \bar{R} \frac{1}{g(m_p, \bar{r})}. \tag{10}$$

Nous sommes ainsi amené à calculer $G(m_p, \bar{r})$ pour les différentes valeurs de $\bar{r}$ et celles, correspondantes, de m_p, c'est-à-dire l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{r}{\bar{r}}} dr}{4 + (r - m_p)^2}.$$

Des valeurs correspondantes de $\bar{r}$ et m_p peuvent être calculées par la formule (3') (du paragraphe 14); un certain nombre de ces valeurs correspondantes sont données dans le tableau fourni dans ce même paragraphe.

Faute de pouvoir intégrer, on a construit les courbes

$$y = \frac{e^{-\frac{r}{\bar{r}}}}{4 + (r - m_p)^2}$$

pour différentes valeurs correspondantes de $\bar{r}$ et de m_p et mesuré graphiquement les aires.

Le tableau ci-dessous donne les résultats

$\bar{r}$	0,20	0,33	0,75	1
m_p	0,18	0,29	0,58	0,74
$g(m_p, \bar{r})$	0,05	0,08	0,17	0,22

Si d'après ces résultats, on construit la courbe $g(m_p, \bar{r})$ lorsque $\bar{r}$ varie, on trouve que c'est une droite passant par l'origine dont l'équation est

$$g(m_p, \bar{r}) = 0,225\,\bar{r} = 0,225\,\frac{\bar{R}}{h}. \qquad (11)$$

Si l'on remplace $g(m_p, \bar{r})$ par cette valeur dans la formule (10), on trouve

$$k = 14\,h\,\frac{a}{v}. \qquad (12)$$

On voit donc que, pour diminuer le rapport du nombre des écartements découplés au nombre des écartements couplés, il y a intérêt à :

— diminuer la distance h de la source à la plaque;

— diminuer l'activité de la source;

— augmenter la vitesse de la source.

A cause de l'imperfection de planéité des plaques et de l'inégalité d'épaisseur de la couche sensible en ses différents points, on n'a pu réduire h à moins de 60 μ.

En ce qui concerne la vitesse de la source, nous avons indiqué que l'on ne pouvait prendre que des vitesses telles que $v\theta < d$, c'est-à-dire que, dans la détermination d'une vie moyenne θ, nous ne pouvons utiliser que des vitesses $v < \frac{d}{\theta}$.

Supposons que nous utilisions une vitesse

$$v = \frac{1}{f}\,\frac{d}{\theta},$$

avec la condition $f \geqslant 1$, la formule (12) devient

$$k = 14\,f\,a\,\theta\,\frac{h}{d}. \qquad (13)$$

Avec un diamètre de champ de 120 μ, $\frac{h}{d} : \frac{1}{2}$, la formule devient

$$k = 7\,f\,a\,\theta. \qquad (13')$$

Sous cette forme, nous voyons que le rapport du nombre des écartements découplés au nombre des écartements couplés, dans une bande étroite au voisinage du maximum de la courbe de répartition est proportionnel à la vie moyenne et à l'activité de la source.

Si l'on connaît, ne serait-ce que de façon approchée la vie moyenne, on pourra choisir l'activité de la source de façon à réduire K à une valeur suffisamment petite.

Dans un Mémoire à paraître prochainement, Mme Odette Goussu apportera le complément théorique qui s'est montré nécessaire pour la mise en œuvre expérimentale de la méthode ci-dessus exposée, ainsi que les résultats de l'application qu'elle a faite pour la détermination de la vie moyenne du thorium C'.

Nous tenons à remercier à nouveau M. Marcel Frilley d'avoir bien voulu se charger de la construction du ciné-nucléographe.

Indiquons, pour terminer, que nous avons pu déterminer par ciné-nucléographie, la période du radium C' et que nous envisageons de déterminer aussi celles de radioéléments artificiels par une méthode théoriquement et expérimentalement beaucoup plus directe qui n'est malheureusement pas applicable dans le cas du thorium C' dont la période est trop courte.

Manuscrit reçu le 9 mars 1955.

BIBLIOGRAPHIE.

LAPORTE M. — Sur une nouvelle méthode d'étude des phénomènes radioactifs : ciné-nucléographie. *C. R. Acad. Sc.*, 1953, **137**, 889.

LAPORTE M. — Une nouvelle méthode d'étude des phénomènes radioactifs : ciné-nucléographie. *J. Physique Rad.*, 1954, **15**, 705-714.

FRILLEY M. — Une réalisation du ciné-nucléographe de M. le Professeur Laporte. *J. Physique Rad.*, 1954, **15**, 715.

GOUSSU Mme O. — Mesures absolues des activités des émetteurs α par Ciné-nucléographie. *J. Physique Rad.*, 1954, **15**, 716.

APPROXIMATIONS SYSTÉMATIQUES DANS LA RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER DES ATOMES A DEUX ÉLECTRONS.
I. PRINCIPE DE LA MÉTHODE. ÉTATS S SYMÉTRIQUES.

Par P. PLUVINAGE,
Faculté des Sciences de Strasbourg.

Sommaire. — L'emploi des variables $s = r_1 + r_2$, $\rho = \frac{r_{12}}{s}$, $\tau = \frac{r_1 - r_2}{s}$ permet de ramener la solution numérique de l'équation de Schrödinger des atomes à deux électrons à celle d'un système linéaire et homogène à une infinité d'inconnues. Les valeurs propres de l'énergie sont les carrés, changés de signe, des racines du déterminant. Les fonctions d'onde sont calculables, sous forme de développements, mais la question de la convergence vers les solutions rigoureuses reste ouverte. Cependant, la convergence numérique des valeurs calculées de l'énergie vers la valeur expérimentale est rapide dans le cas de l'état fondamental de He*I*.

1. Le choix des variables. — En unités atomiques de Hartree, l'équation de Schrödinger d'un atome à deux électrons P_1 et P_2 (*fig.* 1), de numéro

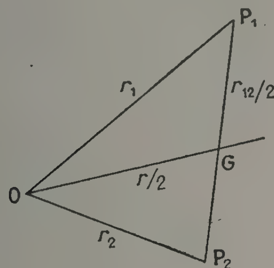


Fig. 1.

atomique Z, s'écrit, avec les notations habituelles,

$$-\frac{1}{2}(\Delta_1 + \Delta_2)\psi + V\psi = E\psi, \tag{1}$$

$$V = -\frac{Z}{r_1} - \frac{Z}{r_2} + \frac{1}{r_{12}}. \tag{2}$$

Le problème est simplifié en supposant le noyau fixe, placé en O, et en négligeant les termes relativistes du hamiltonien, mais les corrections correspondantes sont petites et la résolution de l'équation (1) est le problème principal. L'espace des configurations est alors à six dimensions, mais on sait que deux groupes de trois variables se séparent. Le premier fixe la forme du triangle OP_1P_2, le second son orientation dans l'espace. La solution complète du problème est acquise si l'on résout l'équation réduite aux trois variables du premier groupe.

De nombreux travaux ont été consacrés à cette question. Parmi ceux qui ont un rapport avec la présente étude, citons : *a.* les solutions numériques basées sur la méthode de variation, par Hylleraas [1], Hylleraas et Undheim [2], Chandrasekhar, Elbert et Herzberg [3]; *b.* les tentatives de solution formelle de Gronwall [4], Bartlett [5], Fock [6]; *c.* les tentatives, en quelque sorte intermédiaires, de Lennard-Jones [7], Lennard-Jones et Pople [8]. Le problème initial est celui du choix des variables. Les différents auteurs optent, soit pour une expression très simple de V, soit pour une expression aussi maniable que possible de l'opérateur de Laplace Δ. Je vais montrer qu'en suivant la première voie, on peut transformer (1) en un système différentiel relativement simple et parvenir à une solution dont seule l'application pratique réclame des approximations numériques, d'un type d'ailleurs très courant.

Envisageons les variables de Hylleraas

$$s = r_1 + r_2, \qquad t = r_1 - r_2, \qquad r_{12}. \tag{3}$$

Leurs domaines sont limités de la façon suivante :

$$-r_{12} \leq t \leq r_{12}, \qquad 0 \leq r_{12} \leq s, \qquad 0 \leq s. \tag{4}$$

Hylleraas prend des fonctions approchées de la forme

$$e^{-ks} P(ks,\, kr_{12},\, kt). \tag{5}$$

P étant un polynome en s, r_{12} et t. Plus le degré de P est élevé, plus la détermination de l'énergie est précise. Ainsi, pour l'état fondamental, les derniers calculs de Chandrasekhar, Elbert et Herzberg [3 *bis*], mènent avec quatorze termes à la valeur — 2,903 7035 unités atomiques qui, compte

tenu des diverses corrections, diffère très peu de la valeur expérimentale.

Mais, on peut objecter à la forme (5) que la véritable solution n'est pas une série entière en s, r_{12} et t. En effet, comme l'ont remarqué Bartlett, Gibbons et Dunn [9], la substitution des premiers termes dans l'équation de Schrödinger donne un système incompatible pour les coefficients à partir du degré 2. Cela n'entraîne pas nécessairement que la détermination numérique de l'énergie soit mauvaise puisque la convergence en moyenne quadratique suffit. Quoi qu'il en soit, on ne peut pas espérer arriver à une solution rigoureuse en conservant les variables s, r_{12} et t. Mais, l'examen des conditions (4) suggère d'autres formes de fonctions. Envisageons les combinaisons

$$\rho = \frac{r_{12}}{s}, \qquad \tau = \frac{t}{s}. \tag{6}$$

Nous pouvons espérer résoudre l'équation par une série entière en s, ρ et τ qui ne soit pas une série entière en s, r_{12} et t. Les nouvelles variables sont limitées de la façon suivante (*fig.* 2) :

$$0 \leq \rho \leq 1, \qquad -\rho \leq \tau \leq \rho. \tag{7}$$

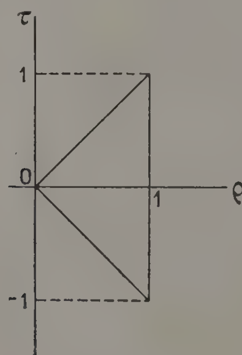


Fig. 2.

Leur domaine de variation qui, dans un système d'axes rectangulaires $O\rho O\tau$, est un triangle $\mathcal{T}$, ne dépend pas des valeurs de s. D'autre part, l'élément de volume a pour expression

$$dv = 8\pi^2 s^5 \rho (1-\tau^2)\, ds\, d\rho\, d\tau.$$

Le coefficient $8\pi^2$ provient de l'intégration des variables angulaires du deuxième groupe. Il intervient partout en facteur et sera omis dans ce qui suit :

$$dv = s^5 \rho (1-\tau^2)\, ds\, d\rho\, d\tau. \tag{8}$$

Dans les intégrations, les variables s d'une part, ρ et τ d'autre part sont bien séparées. Cela est essentiel pour le succès de la méthode.

2. Équation de Schrödinger avec les variables s, ρ et τ.

— Dans cette étude limitée aux états S, les fonctions d'onde sont réelles et le problème à résoudre est le problème d'extremum qui, pour des variables q^1, q^2, q^3, s'énonce

$$\delta \int \mathcal{F}\, dq^1\, dq^2\, dq^3 = 0,$$

avec

$$\mathcal{F} = \left[\frac{1}{2}(\nabla\psi)^2 + V\psi^2 - E\psi^2\right]\sqrt{g}, \qquad dv = \sqrt{g}\, dq^1\, dq^2\, dq^3.$$

Pour réaliser assez rapidement le changement de variables, on part de l'expression $\mathcal{F}$ donnée par exemple par Bethe [10] pour les variables s, r_{12}, t,

$$\begin{aligned}\mathcal{F} = r_{12}(s^2 - t^2)[(\partial_s\psi)^2 + (\partial_t\psi)^2 + (\partial_{r_{12}}\psi)^2] \\ + 2\partial_{r_{12}}\psi[s(r_{12}^2 - t^2)\partial_s\psi + t(s^2 - r_{12}^2)\partial_t\psi] \\ + (s^2 - t^2 - 4Zsr_{12})\psi^2 - Er_{12}(s^2 - t^2)\psi^2.\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{F} = s^5\rho(1-\tau^2)[(\partial_s\psi)^2 - E\psi^2] + s^3 Q[\partial_\rho\psi, \partial_\tau\psi] \\ - 2s^4[\tau^2(1-\rho^2)\partial_\rho\psi + \rho\tau(1-\tau^2)\partial_\tau\psi]\partial_s\psi \\ + s^4(1-\tau^2-4Z\rho)\psi^2.\end{aligned} \tag{9}$$

Q désigne l'expression quadratique homogène

$$\begin{aligned}Q[\partial_\rho\psi, \partial_\tau\psi] = (1+\tau^2)[\rho(1-\rho^2)(\partial_\rho\psi)^2 \\ + 2\tau(1-\rho^2)\partial_\rho\psi\,\partial_\tau\psi \\ + \rho(1-\tau^2)(\partial_\tau\psi)^2].\end{aligned} \tag{10}$$

Appelons $\mathcal{L}$ l'opérateur self-adjoint attaché à Q,

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = (1+\tau^2)\partial_\rho[\rho(1-\rho^2)\partial_\rho + \tau(1-\rho^2)\partial_\tau] \\ + \partial_\tau[\tau(1+\tau^2)(1-\rho^2)\partial_\rho + \rho(1-\tau^2)\partial_\tau]\end{aligned} \tag{11}$$

et désignons par $\mathcal{M}$ l'opérateur

$$\mathcal{M} = \tau^2(1-\rho^2)\partial_\rho + \rho\tau(1-\tau^2)\partial_\tau. \tag{12}$$

L'équation de Schrödinger s'écrit

$$\begin{aligned}\rho(1-\tau^2)\left(\partial_{s^2}^2\psi + \frac{5}{s}\partial_s\psi + E\psi\right) \\ + \frac{1}{s^2}[\mathcal{L}\psi - 4\mathcal{M}\psi] - \frac{1}{s}\partial_s[2\mathcal{M}\psi + \rho(1-5\tau^2)\psi] \\ + \frac{1}{s}(4Z\rho - 1 + \tau^2)\psi = 0.\end{aligned} \tag{13}$$

3. Système différentiel équivalent à l'équation de Schrödinger.

— Considérons, sans encore la préciser, une famille de fonctions $Y_n(\rho, \tau)$ partout régulières et formant un système orthonormé complet avec la densité $\rho(1-\tau^2)$

$$\iint \rho(1-\tau^2)\, Y_m Y_n\, d\rho\, d\tau = \delta_{mn}. \tag{14}$$

Comme nous nous limitons à l'étude des états S symétriques, les Y_n ne sont fonctions que de τ^2 et nous pouvons restreindre la variation de τ à l'intervalle 0,1. Cherchons s'il existe une solution de la forme

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(s)\, Y_n(\rho, \tau). \tag{15}$$

Substituons dans (16), multiplions par Y_m et

intégrons en tenant compte de (17) et en posant

$$J_{mn} = \iint Y_m \mathcal{L} Y_n \, d\rho \, d\tau, \qquad K_{mn} = \iint Y_m \mathcal{M} Y_n \, d\rho \, d\tau,$$
$$A_{mn} = -J_{mn} + 4K_{mn},$$
$$B_{mn} = 2K_{mn} + \iint \rho(1 - 5\tau^2) Y_m Y_n \, d\rho \, d\tau$$
$$= 2K_{mn} - 4\iint \rho Y_m Y_n \, d\rho \, d\tau + 5\delta_{mn},$$
$$C_{mn} = 4Z\iint \rho Y_m Y_n \, d\rho \, d\tau - \iint (1-\tau^2) Y_m Y_n \, d\rho \, d\tau,$$

nous aboutissons au système différentiel

$$\left.\begin{array}{l} F''_m + \frac{5}{s}F'_m + EF_m - \frac{1}{s^2}\sum_{n=0}^{\infty} A_{mn}F_n \\ \quad - \frac{1}{s}\sum_{n=0}^{\infty} B_{mn}F'_n + \frac{1}{s}\sum_{n=0}^{\infty} C_{mn}F_n = 0 \\ \quad (m = 0, 1, 2, \ldots). \end{array}\right\} \quad (16)$$

Si nous voulons que la densité de probabilité de présence ψ^2 soit à détermination unique pour $s=0$, quels que soient ρ et τ, nous devons prendre

$$Y_0 = \text{const.} = a_0. \quad (17)$$

D'après (14), la valeur numérique de a_0 est $\frac{\sqrt{15}}{2}$. De ce choix de Y_0 résulte, en notant C_0 l'intégrale primitivement appelée C_{00},

$$\left.\begin{array}{l} A_{m0} = 0, \qquad B_{00} = 0, \\ B_{m0} = -4a_0\iint \rho Y_m \, d\rho \, d\tau \qquad \text{pour} \quad m \neq 0, \\ C_0 = 5\left(Z - \frac{5}{16}\right), \\ C_{m0} = -ZB_{m0} - a_0\iint (1-\tau^2) Y_m \, d\tau \qquad \text{pour} \quad m \neq 0. \end{array}\right\} \quad (18)$$

En outre

$$K_{mn} = \oint Y_m Y_n [\tau^2(1-\rho^2)\, d\tau - \rho\tau(1-\tau^2)\, d\rho]$$
$$- K_{nm} + 4\iint \rho Y_m Y_n \, d\rho \, d\tau - 5\delta_{mn}.$$

L'intégrale curviligne prise le long du triangle limitant le domaine de variation de ρ et de τ est nulle et il reste

$$K_{mn} = -K_{nm} + 4\iint \rho Y_m Y_n \, d\rho \, d\tau - 5\delta_{mn}.$$

On en déduit

$$B_{mn} = K_{mn} - K_{nm}.$$

$$\left.\begin{array}{l} B_{mn} = -B_{nm}, \qquad B_{mm} = 0, \\ A_{mn} - 2B_{mn} = -J_{mn} + 8\iint \rho Y_m Y_n \, d\rho \, d\tau \\ \quad - 10\delta_{mn} = A_{nm} - 2B_{nm}, \\ A_{0n} = 4B_{0n}. \end{array}\right\} \quad (19)$$

Le système différentiel (19) devient, en écrivant A_m pour A_{mm} et C_m pour C_{mm},

$$\left.\begin{array}{l} F''_0 + \frac{5}{s}F'_0 + \frac{1}{s}C_0F_0 + EF_0 \\ \quad = \frac{1}{s}\sum_{n=1}^{\infty}\left[B_{0n}\left(F'_n + \frac{4}{s}F_n\right) - C_{0n}F_n\right], \\ F''_m + \frac{5}{s}F'_m - \frac{1}{s^2}A_mF_m + \frac{1}{s}C_mF_m + EF_m \\ \quad = \frac{1}{s}(B_{m0}F'_0 - C_{m0}F_0) \\ \qquad + \frac{1}{s}\sum_{n=1}^{\infty}{}'(B_{mn}F'_n - C_{mn}F_n) + \frac{1}{s^2}\sum_{n=1}^{\infty}{}' A_{mn}F_n \\ \quad (m = 1, 2, 3, \ldots). \end{array}\right\} \quad (20)$$

La notation $\sum'$ indique qu'on doit omettre le terme $n = m$ dans la somme.

4. Résolution du système. — Les premiers membres des équations (20) sont du type classique qu'on rencontre dans l'étude des atomes hydrogénoïdes. Considérons par exemple la première. D'après (18), si on néglige tous les F_m pour $m \geq 1$, F_0 est déterminé par l'équation

$$F''_0 + \frac{5}{s}F'_0 + \frac{5}{s}\left(Z - \frac{5}{16}\right)F_0 + EF_0 = 0. \quad (21)$$

C'est l'approximation bien connue qui mène, pour l'état fondamental, à

$$\left.\begin{array}{l} F_0 = \exp -\left(Z - \frac{5}{16}\right)s, \\ E_0 = -\left(Z - \frac{5}{16}\right)^2, \qquad E_0 = -2{,}847 \text{ pour } Z = 2. \end{array}\right\} \quad (22)$$

Comparons à l'étape correspondante du calcul de Gronwall [4] qui arrive à un système plus simple que (20). En rétablissant les unités atomiques, on obtient

$$F''_0 + \frac{5}{x}F'_0 + \frac{32\sqrt{2}}{3\pi}\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2Z}\right)\frac{1}{x}F_0 + \frac{2E}{Z^2}F_0 = 0,$$

avec

$$x = 2Z\sqrt{r_1^2 + r_2^2}.$$

et la valeur E_0 devient

$$E'_0 = -\frac{Z^2}{2}\left[\frac{32\sqrt{2}}{15\pi}\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2Z}\right)\right]^2;$$
$$E'_0 = -2{,}500 \qquad \text{pour} \quad Z = 2.$$

Elle est moins bonne que (22). On peut donc bien présumer que la simplicité du système de Gronwall n'est tout compte fait, pas avantageuse. Je vais d'ailleurs montrer qu'on peut facilement trouver une solution, malgré la complexité relative des seconds membres.

Procédons aux transformations suivantes dont les deux premières, déjà utilisées par Gronwall, sont classiques dans la résolution de l'équation de l'hydrogène, et dont la troisième est destinée à simplifier les relations de récurrence ultérieures.

a. E, négatif, est noté $-\varepsilon^2$ et l'on pose

$$F_n = f_n\, e^{-\varepsilon s}, \qquad \varepsilon^2 = -E \qquad (\varepsilon > 0). \tag{23}$$

b. On prend pour variables

$$x = 2\varepsilon s. \tag{24}$$

c. pour $n \geqq 1$, on change à nouveau d'inconnue

$$f_n = x g_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{25}$$

On aboutit alors au système

$$x f_0'' + (5 - x) f_0' + \frac{C_0 - 5\varepsilon}{2\varepsilon} f_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_{0n}(5 g_n + x g_n') - \frac{C_{0n} + B_{0n}\varepsilon}{2\varepsilon} x g_n \right], \tag{26}$$

$$\left.\begin{aligned} x^2 g_m'' + (7 - x) x g_m' + \left[5 - A_m + \frac{C_m - 7\varepsilon}{2\varepsilon} x\right] g_m &= B_{m0} f_0' - \frac{C_{m0} + B_{m0}\varepsilon}{2\varepsilon} f_0 \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty}{}' \Big[(B_{mn} + A_{mn}) g_n + B_{mn} x g_n' - \frac{C_{mn} + B_{mn}\varepsilon}{2\varepsilon} x g_n \Big] \\ &\qquad (m = 1, 2, 3, \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Nous sommes assurés d'obtenir une solution de module carré sommable si f_0 et les g_n n'augmentent pas plus vite que $e^{-\varepsilon s}$ pour s grand. Nous pouvons tenter des développements

$$f_0 = \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_{0p} L_p^4, \tag{28}$$

$$g_m = \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_{mp} L_p^5 \qquad (m \geqq 1). \tag{29}$$

L_p^4 et L_p^5 sont les polynomes de Laguerre associés qui vérifient les équations différentielles

$$x (L_p^4)'' + (5 - x)(L_p^4)' + p L_p^4 = 0,$$
$$x (L_p^5)'' + (6 - x)(L_p^5)' + p L_p^5 = 0.$$

Les fonctions génératrices sont telles que

$$(1 - z)^{-5} \exp \frac{xz}{z - 1} = \sum_{p=0}^{\infty} L_p^4(x) z^p;$$

$$(1 - z)^{-6} \exp \frac{xz}{z - 1} = \sum_{p=0}^{\infty} L_p^5(x) z^p$$

et les relations de récurrence utiles s'écrivent [11]

$$(L_p^4)' = -L_{p-1}^5; \qquad L_p^4 = L_p^5 - L_{p-1}^5;$$
$$5 L_p^5 + x (L_p^5)' = (p + 5) L_p^4;$$
$$x L_p^5 = (p + 5) L_p^4 - (p + 1) L_{p+1}^4;$$
$$x (L_p^5)' = p L_p^5 - (p + 5) L_{p-1}^5;$$
$$x L_p^5 = -(p + 1) L_{p+1}^5 + 2(p + 3) L_p^5 - (p + 5) L_{p-1}^5.$$
$$L_0^4 = 1, \qquad L_1^4 = 5 - x, \qquad L_2^4 = 15 - 6x + x^2, \qquad \ldots;$$
$$L_0^5 = 1, \qquad L_1^5 = 6 - x, \qquad L_2^5 = 21 - 7x + x^2, \qquad \ldots.$$

La substitution de (28) et (29) dans (26) et l'utilisation des formules de récurrence donnent une égalité entre deux développements suivant les polynomes L_p^4. D'une façon analogue, (27) devient une égalité entre deux développements suivant les L_p^5. En identifiant terme à terme, on passe du système différentiel à un système doublement infini d'équations linéaires et homogènes entre les α_{mp}. Ce système s'écrit

$$\left.\begin{aligned} &[C_0 - (2p + 5)\varepsilon]\,\alpha_{0p} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} [(C_{0n} - B_{0n}\varepsilon)(p + 5)\,\alpha_{np} \\ &\qquad - (C_{0n} + B_{0n}\varepsilon)\, p\, \alpha_{np-1}] = 0 \\ &\qquad (p = 0, 1, 2, \ldots), \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

$$\left.\begin{aligned} &(C_{m0} + B_{m0}\varepsilon)\,\alpha_{0p} - (C_{m0} - B_{m0}\varepsilon)\,\alpha_{0p+1} \\ &\quad - [C_m - (2p + 5)\varepsilon]\, p\, \alpha_{mp-1} \\ &\quad + \{2(p + 3) C_m \\ &\qquad - 2[2(p + 2)(p + 4) + A_m]\varepsilon\}\,\alpha_{mp} \\ &\quad - [C_m - (2p + 7)\varepsilon](p + 6)\,\alpha_{mp+1} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty}{}' \{-p(C_{mn} + B_{mn}\varepsilon)\,\alpha_{np-1} \\ &\qquad + [2(p+3) C_{mn} \\ &\qquad\quad + 2(2 B_{mn} - A_{mn})\varepsilon]\,\alpha_{np} \\ &\qquad - (p + 6)(C_{mn} - B_{mn}\varepsilon)\,\alpha_{np+1}\} = 0 \\ &\qquad (p = 0, 1, 2, \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

D'après un théorème connu sur les équations aux valeurs propres, le système ne possède une solution que si le déterminant des coefficients des α est nul. Les valeurs possibles de ε sont les zéros de ce déterminant. Les solutions α_{np} du système déterminent les fonctions d'ondes

$$\left.\begin{aligned} \psi = e^{-\varepsilon s} \Big[&\sum_{p=0}^{\infty} \alpha_{0p} L_p^4(2\varepsilon s) \\ &+ 2\varepsilon s \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_{np} L_p^5(2\varepsilon s)\, Y_n(\rho, \tau) \Big]. \\ &(\varepsilon = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

5. Polynomes orthogonaux en ρ et τ. — La résolution de l'équation de Schrödinger se trouve donc ramenée à la formation d'un système orthonormé complet de fonctions Y_n avec la densité $\rho(1-\tau^2)$. Mais la preuve définitive que la solution (32) est rigoureuse et non pas seulement approchée en moyenne quadratique exige une étude spéciale difficile qui n'est pas achevée.

L'idée la plus simple pour former des fonctions Y_n consiste à orthogonaliser la suite des puissances de ρ et de τ rangées dans un certain ordre. Pour les états symétriques, les puissances impaires de τ ne figurent pas et l'on peut envisager, par exemple, la suite

$$1,\ \rho;\quad \tau^2,\ \rho^2;\quad \tau^2\rho,\ \rho^3;\quad \tau^4,\ \tau^2\rho^2,\ \rho^4,\quad \ldots$$

Avec des fonctions symétriques, comme nous l'avons vu plus haut, l'intervalle de variation de τ peut être réduit de 0 à 1 et les Y_n sont des polynomes qui vérifient

$$\int_0^1 \rho\, d\rho \int_0^\rho (1-\tau^2)\, Y_m Y_n\, d\tau = \delta_{mn}.$$

Les quatre premiers polynômes sont

$$Y_0 = \frac{\sqrt{15}}{2} = 1{,}936\,491\,6,$$

$$Y_1 = 7{,}082\,778\,9 - 9{,}713\,525\,3\rho,$$

$$Y_2 = 0{,}597\,179\,5 - 3{,}243\,801\,7\rho + 12{,}376\,648\,2\tau^2,$$

$$Y_3 = 16{,}464\,422\,9 - 56{,}178\,747\,7\rho + 0{,}078\,954\,92\tau^2 + 42{,}853\,944\,0\rho^2.$$

La définition des Y_n comporte un certain arbitraire [11]. On trouverait des polynomes différents en orthogonalisant la suite, 1, ρ, ρ^2, τ^2, ρ^3, $\rho\tau^2$, ... par exemple. Mais quelle que soit la définition, les polynomes en ρ et τ permettent de représenter des fonctions développables en série entière de ρ et τ.

On peut présenter un argument qui, sans être décisif, amène à penser que la solution décrite est rigoureuse. Écrivons l'équation de Schrödinger sous la forme

$$\frac{1}{2}(\Delta_1+\Delta_2)\psi + \left(\frac{a}{r_1} + \frac{a}{r_2} - \frac{b}{r_{12}}\right)\psi + E\psi = 0, \quad (33)$$

a et b étant des constantes qui sont égales respectivement à Z et à 1. Au lieu de les regarder comme des constantes, considérons-les comme des paramètres variables. Aux deux cas limites

$$a \neq 0, \quad b = 0 \quad \text{et} \quad a = 0, \quad b \neq 0$$

correspondent bien des solutions qui sont fonctions entières de s, ρ et τ. En effet, dans le premier cas, ce sont des produits de fonctions d'ondes hydrogénoïdes, fonctions entières de r_1 et r_2 donc de $s\frac{(1+\tau)}{2}$, et $s\frac{(1-\tau)}{2}$. Dans le second, un système complet de solutions est donné par les fonctions

$$u(kr_{12})\frac{1}{\sqrt{r}}J_{\frac{1}{2}}(k'r), \quad (34)$$

où u désigne une fonction d'onde de choc; r, le double de la distance du centre de gravité des électrons au noyau; $J_{\frac{1}{2}}$, la fonction de Bessel d'ordre $\frac{1}{2}$; k et k', deux constantes arbitraires. Il suffit pour le démontrer d'écrire l'équation avec les variables indiquées qui permettent la séparation.

Les fonctions (34) sont développables en série entière de r_{12} et r. Mais ces variables peuvent être exprimées elles-mêmes en fonction entière de s, ρ et τ,

$$r_{12} = \rho s, \qquad r = s(1+\tau^2-\rho^2)^{\frac{1}{2}} = s\left(1 + \frac{\tau^2}{2} - \frac{\rho^2}{2} + \ldots\right).$$

Bien que les formes de solution envisagées se rapportent seulement au cas où les électrons sont tous les deux dans un état $l = 0$, on étendrait facilement la démonstration au cas des états S obtenus par compensation des moments orbitaux.

Naturellement, le procédé de calcul décrit antérieurement n'est pas valable pour la fonction (34) qui appartient au spectre continu, mais le point important est la possibilité de résoudre (33), au moins formellement, par des fonctions développables en séries entières de s, ρ et τ. Ce fait, sans être acquis, est très probable puisque la détermination des coefficients des développements est possible en principe quand a ou b est nul. Or, s'il existe des solutions de ce type, on peut les mettre sous la forme (32) qui constituerait bien une solution rigoureuse appartenant au spectre discontinu.

Comme les coefficients α_{mp} comportent deux indices, il faut choisir un ordre qui permette d'approcher progressivement de la solution rigoureuse. Le premier terme est évidemment α_{00}. Pour le second terme, il est naturel de prendre α_{10} grâce auquel on fait intervenir ρ. Remarquons que, d'après (32), le bénéfice de l'emploi des nouvelles variables n'apparaît pas encore; ρ sera facteur de s et le terme introduit dans la solution sera en r_{12}. Après α_{10} vient naturellement α_{01}. Pour suivre une voie analogue à celle de Hylleraas, nous ferons ensuite intervenir le terme en τ^2 contenu dans le polynome P_2. Cela nécessite la prise en considération du coefficient α_{20}. Cette fois la solution approchée comporte un terme en $\tau^2 s = t^2 s^{-1}$ qui ne se trouve pas dans les solutions proposées antérieurement. Cette étape est donc décisive pour le succès pratique de la méthode et nous bornerons là la première application numérique. Les approximations suivantes seraient obtenues en considérant α_{11}, α_{20},

α_{03}; .... L'équation d'ordre quatre s'écrit

$$\begin{vmatrix} \overset{(\alpha_{00})}{C_0 - 5\varepsilon} & \overset{(\alpha_{10})}{5(C_{01} - B_{01}\varepsilon)} & \overset{(\alpha_{01})}{0} & \overset{(\alpha_{20})}{5(C_{02} - B_{02}\varepsilon)} \\ C_{10} + B_{10}\varepsilon & 6C_1 - 2(16 + A_1)\varepsilon & -C_{10} + B_{10}\varepsilon & 6C_{12} + 2(2B_{12} - A_{12})\varepsilon \\ 0 & -C_{01} - B_{01}\varepsilon & C_0 - 7\varepsilon & -C_{02} - B_{02}\varepsilon \\ C_{20} + B_{20}\varepsilon & 6C_{21} + 2(2B_{21} - A_{21})\varepsilon & -C_{20} + B_{10}\varepsilon & 6C_2 - 2(16 + A_2)\varepsilon \end{vmatrix} = 0. \quad (35)$$

En tête de chaque colonne est indiquée l'inconnue dont les coefficients figurent dans la colonne. Après division de la première ligne par 5 le déterminant est symétrique d'après (19).

L'application numérique au cas de HeI ($Z = 2$) a donné les résultats suivants :

Ordre de l'approximation.	ε.	E.
1	1,687 5	—2,847 66
2	1,699 75	—2,889 14
	0,668 77	—0,447 25
3	1,700 16	—2,890 54
	1,229 09	—1,510 67
	0,650 23	—0,422 80
4	1,703 33	—2,901 34
	1,323 91	—1,752 73
	0,835 81	—0,698 58
	0,648 15	—0,420 10

Donnons en outre la fonction d'onde de l'état fondamental en approximation 4, exprimée à l'aide des variables de Hylleraas,

$$\psi_0 = e^{-1,70333s}\left(0,882\,64 - 0,100\,50s + 0,206\,70r_{12} + 0,155\,59\frac{t^2}{s}\right). \quad (36)$$

La convergence vers la valeur expérimentale — 2,903 72 est rapide pour l'état fondamental, en dépit de l'arrêt dans la progression constaté à l'approximation 3. L'emploi de machines à calculer électroniques permettra sans doute de fixer la valeur propre théorique avec une grande précision. Pour les états excités, on peut espérer atteindre le même objectif, mais c'est moins sûr parce qu'il faut former des déterminants à grand nombre de termes. Ainsi avec 15 lignes et 15 colonnes, on calcule 15 niveaux S symétriques. Il est probable que $2\,^1S$ sera bien déterminé, mais que la précision diminuera rapidement pour $3\,^1S$, $4\,^1S$, etc.

Remarquons que la fonction d'onde (36) donne un résultat un peu moins bon que la fonction d'essai de Hylleraas,

$$e^{-\frac{ks}{2}}(1 + c_1 r_{12} + c^2 t^2)$$

avec ses trois paramètres $k_1 c_1$ et c_2. La valeur du minimum est — 2,902 44 chez Hylleraas. Mais les procédés ne sont pas réellement comparables et l'on doit regarder comme un indice favorable l'amélioration obtenue à l'ordre 4 par intervention d'un terme en $\frac{t^2}{s}$. On retrouvera le terme en t^2 quand on envisagera un coefficient α_{21}.

On peut donc considérer que la méthode est justifiée par son succès dans l'application numérique.

En terminant, je veux remercier M. J. Regnier, chimiste théoricien à Nancy, d'une importante indication bibliographique.

Manuscrit reçu le 9 mai 1955.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Hylleraas E. — *Z. Phys.*, 1929, **54**, 347.
[2] Hylleraas E. et Undheim B. — *Z. Phys.*, 1930, **65**, 759.
[3] Chandrasekhar S., Elbert D. et Herzberg G. — *Phys. Rev.*, 1953, **91**, 1172.
[3 *bis*]. Herzberg G. — *Proc. of the Rydberg Centennial Conf. on Atom. Spect. Lund Univ. Årsskrift*, **50**, n° 21, 86.
[4] Gronwall T. H. — *Phys. Rev.*, 1937, **51**, 655.
[5] Bartlett J. H. Jr. — *Phys. Rev.*, 1937, **51**, 661.
[6] Fock V. A. — *Isvestia Academi Naouk S.S.S.R.*, 1954, **18**, 161.
[7] Lennard-Jones J. E. — *Proc. Nat. Acad. Sc. U. S.*, 1952, **38**, 496.
[8] Lennard-Jones J. E. et Pople J. A. — *Phil. Mag.*, 1952, **43**, 581.
[9] Bartlett J. H. Jr., Gibbons J. J. Jr. et Dunn C. G. — *Phys. Rev.*, 1935, **47**, 679 et 804.
[10] Bethe H. — Handbuch der Physik (J. Springer, Berlin, 1953), XXIV-1, p. 355.
[11] Erdelyi A. — Higher Transcendental Functions (Mc Graw Hill Book Company, 1953), II.

COMPORTEMENT SOUS IRRADIATION γ INTENSE DES COMPTEURS GEIGER-MÜLLER A PAROIS DE VERRE ET GRAPHITAGE EXTERNE

Par Daniel BLANC.

Laboratoire de Physique atomique et moléculaire du Collège de France, Paris.

Sommaire. — La structure des compteurs de Geiger-Müller à parois de verre et graphitage externe les adapte de façon immédiate à des irradiations modérées : toutes les études les concernant ont, jusqu'ici, porté sur des taux de comptage peu élevés. Selon certains auteurs, il serait même impossible de les adapter à des irradiations intenses.

Les expériences décrites ici concernent leur comportement sous des taux de comptage allant jusqu'à 50 000 impulsions/s, pour des irradiations γ.

Après avoir mesuré avec précision le volume sensible du compteur, on établit que la variation du seuil de Geiger externe avec le taux de comptage N_0 est donnée par

$$\Delta V_G = BN_0\rho\frac{e}{\pi b}\sqrt{V_G^0 - V_D},$$

ρ, résistivité du verre utilisé (Pyrex, Novo, UVK-1, UVK-2); e, épaisseur de la paroi de verre; b, diamètre interne du cylindre; V_G^0, seuil de Geiger sous irradiation très faible; V_D, seuil de démarrage pour un circuit associé de seuil convenablement choisi. Dans cette formule n'apparaît pas la longueur efficace du cylindre. B est un paramètre de la forme

$$B = K\,\mathrm{Log}_e\frac{b}{a},$$

a étant le diamètre de l'anode. K est indépendant de la nature du constituant polyatomique et de sa pression lorsqu'elle est inférieure à 1,4 cm de mercure (pour le méthylal, tout au moins). On établit expérimentalement la variation de K avec la pression P_A de l'argon. Pour P_A supérieur ou égal à 12 cm de mercure,

$$K = \frac{8,37.10^{-12}}{P_A}.$$

Ces résultats sont contrôlés par des expériences identiques faites sur des compteurs du type classique à cathode interne entre le cylindre et la masse desquels est placé un système R-C convenablement choisi.

Ces expériences permettent de mesurer en fonction de la température la résistivité du verre utilisé.

On déduit de ce qui précède les principes généraux de fabrication et d'utilisation de tels compteurs destinés à des taux de comptage élevés. En ce qui concerne les remplissages, trois solutions sont possibles : vapeur polyatomique pure; vapeur polyatomique + argon sous pression relativement élevée; vapeur polytatomique + un gaz d'appoint pour lequel K est plus faible que la valeur obtenue pour l'argon. L'hydrogène convient bien.

On décrit enfin une réalisation pratique de compteur pour laquelle ΔV_G ne dépasse pas la longueur du palier sous irradiation faible, tant que N_0 est inférieur ou égal à $2,6.10^6$ impulsions/mn.

Introduction. — R. Maze [1] a décrit un nouveau modèle de compteurs de Geiger-Müller, dont le cylindre est un tube de verre, de résistivité suffisamment faible, recouvert extérieurement d'une couche de graphite. La cathode proprement dite est constituée par la paroi interne du verre, qui se charge aussi uniformément qu'une surface conductrice. Ces compteurs étaient destinés à des recherches sur le rayonnement cosmique; pour des taux de comptage faibles, R. Maze nota leurs qualités : palier d'une longueur et d'une stabilité remarquables, pente très réduite, efficacité normale, absence de décharge continue au-dessus de la zone d'utilisation, absence de décharges parasites résiduelles après retour au potentiel normal, simplicité de construction et de remplissage, d'où prix de revient très modique.

Leur structure les adaptant de façon immédiate à des irradiations modérées, toutes les études les concernant ont porté, jusqu'ici, sur des taux de comptage peu élevés. Les valeurs maxima, en nombre d'impulsions par minute que l'on peut relever dans la littérature sont : 300 pour R. Maze (1946) [1], 2 000 pour D. Blanc (1949) [2], 3 600 pour P. Bassi et E. Beretta (1949) [3], 4 200 pour M. Yasin, R. Ahmed et P. S. Gill (1951) [4], 8 000 pour M. Grenon et R. Viallard (1952) (5], 12 000 pour R. Favre et C. Haenny (1953) [6], 3 000 pour M. Celma, J. A. Garcia-Fite et R. Ségovia-Torres (1953) [7], 1600 pour A. Aron (1953) [8], 9 000 pour S. Michalak, B. Mowczan et A. Zawadzki (1954) [9].

On trouve même répandue l'opinion suivant laquelle de tels compteurs seraient incapables de répondre à des taux de comptage élevés [10].

Sous irradiation intense, le seuil de Geiger augmente rapidement avec le taux de comptage (pour les verres à la soude utilisés en général), en même temps que la zone de proportionnalité limitée

s'élargit. Certains auteurs qualifient à tort ce phénomène de « saturation ». Par contre, la stabilité est renforcée, la pente diminue, en même temps que la longueur de palier s'accroît [11]. L'adaptation de tels compteurs à des irradiations intenses constitue donc un problème intéressant.

Pour des taux de comptage modérés, l'apport de charge sur la paroi interne du cylindre de verre est faible au seuil de Geiger où les impulsions sont de petite taille. Par contre, le circuit résistance-capacité auquel équivaut la coque de verre [12] intervient lorsque le nombre d'impulsions par unité de temps augmente : le potentiel de la paroi interne du verre s'élève, il en résulte que le seuil de Geiger externe est repoussé vers les hautes tensions.

La définition de V_G utilisée ici est celle donnée par S. A. Korff [10] : V_G est la tension pour laquelle la décharge commence à se propager sur la longueur totale du fil, la taille de l'impulsion produite ne dépendant alors plus du nombre d'ions initiaux formé. V_G est la base de la région linéaire du palier, et peut ainsi être déterminé graphiquement, cette valeur étant contrôlable par l'étude des impulsions à l'oscillographe cathodique.

Dispositif expérimental. — 1. Compteurs utilisés (*fig.* 1). — Ils sont du modèle décrit par Mac-Knight et Chasson [13]. Le cylindre de verre est recouvert extérieurement d'Aquadag. L'anode ne comporte pas de ressort terminal, la tension voulue étant obtenue par étirage du verre. Les zones à isoler sont recouvertes d'un vernis à base d'amiante, qui élimine toute conductibilité de surface et résiste à d'importantes variations de température. Les épaisseurs de paroi utilisées vont de 0,15 à 1,25 mm.

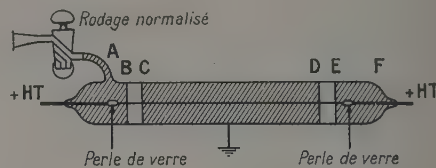


Fig. 1. — Schéma des compteurs utilisés.

2. Qualités de verre utilisées. — Pyrex, « Novo » (verreries de Choisy-le-Roi), UVK-1 et UVK-2 (verreries de Bagneaux). Le tableau I résume leurs caractéristiques. R_1 et C_1 sont la résistance et la capacité d'un cylindre de verre de 2 cm de diamètre intérieur, 1 mm d'épaisseur et 1 cm de longueur. La constante de temps du circuit auquel équivaut la paroi de verre est

$$\theta_1 = 0{,}088 . 10^{-12} \rho \varepsilon .$$

Tableau I.

Type de verre.	Constante diélectrique (u. e. s).	Résistivité à 20° C (ω-cm).	Coefficient de dilat. α.	R_1 à 20° C (ω).	C_1 à 20° C (pF).	θ_1 à 20° C (s).
Pyrex	4,83	10^{15}	$\alpha_{21}^{171} = 36 . 10^{-7}$	$1{,}45 . 10^{13}$	29,36	425
Novo	6	$5{,}46 . 10^{11}$	$\alpha_{0}^{300} = 96{,}6 . 10^{-7}$	$7{,}90 . 10^{9}$	36,47	0,29
UVK-2	6	$2 . 10^{11}$	$\alpha_{0}^{300} = 98{,}2 . 10^{-7}$	$2{,}89 . 10^{9}$	36,47	0,11
UVK-1	6	$7{,}05 . 10^{10}$	$\alpha_{0}^{300} = 102 . 10^{-7}$	$1{,}02 . 10^{9}$	36,47	0,037

Elle ne dépend pas des dimensions du compteur [14].

Les sorties anodiques des compteurs Pyrex sont des tiges de tungstène de 0,5 mm de diamètre. Pour le verre « Novo », j'utilise le copperclad, qui se soude directement à ce verre. Dans le cas de l'UVK-1 et de l'UVK-2, les sorties restent en copperclad, mais les extrémités du compteur sont en verre « Novo », qui se soude directement à l'UVK-1 et l'UVK-2.

3. Remplissages. — Les compteurs sont pompés pendant plusieurs heures sous une pression voisine de 0,1 μ de mercure, sans étuvage susceptible d'avoir un effet néfaste sur la qualité du palier, et surtout sur la définition exacte du seuil de Geiger [1], [15]. L'argon utilisé est spectroscopiquement pur, le méthylal redistillé, l'éthanol distillé et déshydraté sous vide.

4. Dispositif de comptage (*fig.* 2). — Une alimentation haute tension stabilisée à 1 pour 1000 fournit la tension positive de l'anode. La résistance de charge est de 2 MΩ. La précision de lecture de la

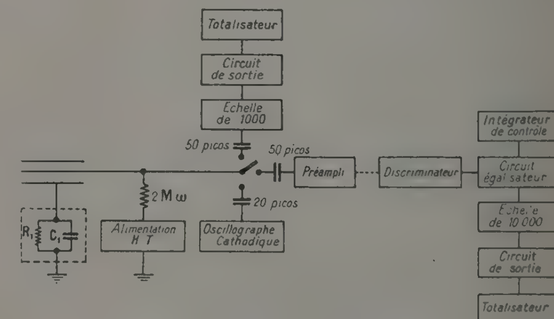


Fig. 2. — Dispositif de comptage.

tension est de 5 V. Les impulsions négatives recueillies sur le fil passent à travers une capacité de 50 pF dans un préamplificateur de gain égal à 100; ceci

permet d'utiliser des câbles de liaison assez longs pour que les mesures soient faites dans une zone non contaminée par les sources radioactives utilisées.

L'entrée du bloc de comptage proprement dit est constituée par un discriminateur du type Schmitt [16], permettant la réalisation d'un seuil variable. Un oscillographe cathodique permet de mesurer le seuil du circuit et de contrôler la valeur exacte du seuil de Geiger.

A la sortie du discriminateur, les impulsions passent dans un circuit normalisateur, puis dans une décade rapide (temps de résolution de 0,6 μs) suivie elle-même d'une décade de 5 μs, puis de deux décades de 25 μs. Le numéroteur électromagnétique totalisateur possède une vitesse limite et le taux de comptage maximum mesurable sans perte est de 50 000 impulsions/s. Un intégrateur de contrôle, de cadence maximum identique, est placé en parallèle.

Une tension de seuil beaucoup plus élevée est obtenue en connectant le compteur sur un circuit échelle à seuil constant de 20 V, formé de trois décades (résolution de 5 μs) et d'un numéroteur limitant la cadence de comptage à 5 000 impulsions/s. Des câbles de jonction de longueur variable permettent de réaliser des seuils supérieurs ou égaux à 20 V.

Rayonnement utilisé. — L'épaisseur minimum de paroi réalisée est de l'ordre de 50 mg/cm². Il est donc impossible de détecter des α. Par contre, les β d'énergie supérieure à 0,2 MeV environ sont détectables [17]. Je me suis cependant limité à l'utilisation de sources γ : ce sont les électrons secondaires créées par ces rayons γ qui déclenchent l'impulsion, et les effets d'une irradiation γ sont donc analogues à ceux d'un rayonnement β.

J'ai utilisé des sources de césium 134 (0,568, 0,602 et 0,794 MeV), de cobalt 60 (1,17 et 1,33 meV) et de radium (spectre complexe et étalé). Dans tous les cas, les phénomènes observés ont été les mêmes : je ne préciserai donc pas, dans ce qui suit, la nature de la source utilisée.

Mesure précise du volume sensible du compteur. — Il est, dans cette étude, nécessaire de connaître avec précision la longueur efficace L du cylindre. Les deux extrémités graphitées AB et EF (*fig.* 1) portées au potentiel du fil, suppriment le champ électrique dans les régions terminales où des impulsions parasites sont à craindre. En première approximation, CD définit L [18]. Cependant, les zones isolées BC et DE introduisent une distorsion importante des lignes de force du champ électrique, le potentiel électrique, nul en D devenant égal à V en E. Pour les verres Pyrex et Novo, cette zone isolée peut être très réduite et, pour un compteur assez long, L coïncide pratiquement avec CD [18]. Mais la conductivité de l'UVK-1 nécessite une longueur isolée plus grande : l'effet risque de ne plus être négligeable.

Pour mesurer L, j'ai utilisé des compteurs à cathode multiple du modèle représenté dans la figure 3, chaque section graphitée fonctionnant séparément si toutes les autres sont placées à la tension du fil. Ce dispositif équivaut à une série de compteurs de même diamètre, de remplissages

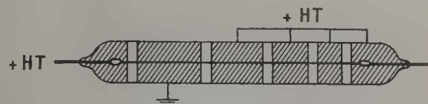


Fig. 3. — Schéma d'un compteur à cathode multiple.

identiques, donc de même efficacité, mais de longueur variable. Le compteur étant placé dans un flux radioactif uniforme, le taux de comptage porté en fonction de la longueur graphitée L_c varie linéairement, et possède une certaine ordonnée à l'origine (*fig.* 4). L'intersection de la droite avec l'axe des

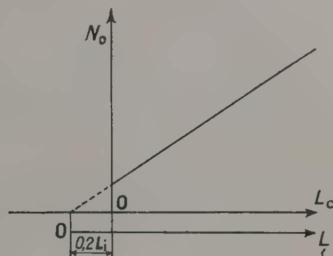


Fig. 4. — Taux de comptage en fonction de la longueur graphitée L_c.

abscisses donne la valeur exacte de L. Soit L_i la longueur totale de cylindre isolée de part et d'autre de L_c. Quelle que soit la nature du verre, pour des diamètres internes b variant de 0,5 à 3 cm,

$$L = L_c + 0,2 L_i.$$

Cette relation étant valable pour le seuil de Geiger et établie pour L_i inférieur ou égal à 4 cm.

Une publication récente de A. M. Baptista et al. [19] confirme qualitativement l'influence de L_i sur la valeur de L.

Charge $\bar{q}$ par impulsion dans la région de proportionnalité limitée. — Sur l'écran d'un oscillographe cathodique à balayage déclenché (sensibilité de 5/1000e V), sont comptées et mesurées les impulsions correspondant à une tension de fonctionnement inférieure à V_G. La charge moyenne $\bar{q}$ par impulsion détectable (on néglige ainsi les impulsions de taille inférieure à 0,005 V) a, comme je l'ai déjà signalé [20] en fonction de V la variation donnée

par la figure 5. Si la charge q_D correspondant au seuil du circuit associé est faible, la partie de courbe située au-dessus de cette valeur est assimilable à une parabole d'axe OV et de sommet V_D, tension pour laquelle le circuit commence à enregistrer

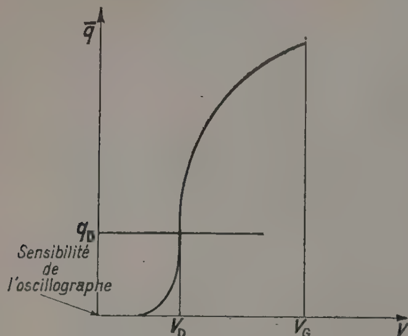


Fig. 5. — Variation de $\bar{q}$ avec la tension V (échelle arbitraire).

des comptages. D'autre part, l'expérience montre que $\bar{q}$ est proportionnelle à L

$$\bar{q} = BL\sqrt{V - V_D},$$

B étant un paramètre dépendant du remplissage, du diamètre a du fil et du diamètre interne du cylindre b. En particulier, pour le seuil V_G,

$$q = BL\sqrt{V_G - V_D}. \qquad (1)$$

Influence sur la valeur externe du seuil de Geiger. — Pour un taux de comptage de N impulsions/s, la paroi interne du verre reçoit par seconde la charge $N\bar{q}$. Si $I(t)$ est l'intensité du courant traversant la résistance R_1, le potentiel v de la paroi interne est donné, en fonction du temps, par l'équation

$$v + \theta_1 \frac{dv}{dt} = R_1 I(t).$$

Si la constante de temps $\theta_1 = R_1 C_1$ est grande devant la durée d'une impulsion et devant l'intervalle moyen séparant deux impulsions successives, cette équation prend la forme simple

$$v = N\bar{q}R_1. \qquad (2)$$

Pour un compteur à parois de verre et graphitage externe, la valeur de V_G à introduire dans l'équation (1) est celle mesurée sous une irradiation faible, pour laquelle v est négligeable. Soit V_G^0 cette valeur. Pour N_0 impulsions/s au seuil de Geiger, l'augmentation extérieure du seuil est, d'après (2),

$$\Delta V_G = BN_0 R_1 L\sqrt{V_G^0 - V_D}.$$

Si e est l'épaisseur de la paroi de verre,

$$\boxed{\Delta V_G = BN_0 \rho \frac{e}{\pi b}\sqrt{V_G^0 - V_D}.} \qquad (3)$$

Choix du seuil du circuit associé. — Pour que (3) puisse être vérifié expérimentalement, q_D doit couper la courbe $\bar{q} = f(V)$ dans sa région pratiquement verticale : V_D sera ainsi défini avec une précision satisfaisante, et V_G ne sera pas influencé par la valeur du seuil.

1° Le discriminateur permet de faire de nombreuses expériences, sur des compteurs de géométrie et de remplissage variés. Dans tous les cas, V_D est constant, à 5 V près, pour des valeurs de seuil comprises entre 0,01 et 0,07 V.

2° Il en est de même pour V_G si le seuil du circuit est inférieur à 0,2 V.

Ces résultats sont valables pour toute la gamme de remplissages étudiés plus loin, et les valeurs correspondant à des remplissages classiques sont plus élevées.

Détermination expérimentale de B. — Les mesures ont été faites à la température ambiante, où la résistivité du Pyrex est trop élevée pour rendre possibles des mesures de variation de seuil. L'étude qui suit a été faite à l'aide de compteurs « Novo », UVK-1 et UVK2.

1. Remplissage standard. — Méthylal sous la pression de 1 cm de mercure + argon sous la pression de 8,5 cm de mercure. La température était de 20 ± 1° C. Les expériences ont porté sur des ensembles de six compteurs, de forme identique remplis simultanément. L'équation (3) se vérifie tant que le taux de comptage est inférieur à une certaine valeur N_R. Au-dessus, la variation est plus lente et le seuil extérieur tend vers une valeur limite. N_R permet de mesurer le temps de restitution du compteur pour le seuil de Geiger [21]. Il convient de noter que, dans beaucoup d'applications pratiques, le détecteur est utilisé dans la région linéaire, et que N_R correspond à une irradiation γ assez forte.

De la droite donnant V_G en fonction de N_0 se déduit B. B est de la forme

$$\boxed{B = k \operatorname{Log}_e \frac{b}{a},} \qquad (4)$$

K ne dépendant que du remplissage utilisé. Pour ce remplissage

$$k = 1,10.10^{-12}.$$

Les mesures ont porté sur des valeurs de $\frac{b}{a}$ allant de 80 à 320, zone donnant les détecteurs de qualités optima, comme l'ont montré Craggs, Bosley et Jaffe [22], ainsi que M. Chaudhri et Fenton [23].

2. Vérification a l'aide de compteurs a cathode interne. — J'ai utilisé une série de compteurs de la « 20th Century Electronics » [24] remplis d'argon sous la pression de 9 cm de mercure

et de vapeur polyatomique (éthanol ou formiate d'éthyle) sous la pression de 1 cm de mercure. Entre le cylindre et la masse est intercalé un système résistance-capacité, procédé également utilisé par A. Aron [8] en vue d'autres applications. Les effets observés sont identiques à ceux obtenus plus haut, ce qui confirme que le phénomène est dû uniquement à l'existence de la résistance et de la capacité de la paroi de verre.

Les mesures établissent que :

1° B est bien de la forme donnée par l'équation (4);

2° K ne dépend pas de la nature de la vapeur polyatomique utilisée.

3. Variation de K avec la pression P_A de l'argon. — Les remplissages étaient constitués d'éthanol sous une pression voisine de 1 cm de mercure et d'argon sous des pressions allant de 1,1 à 39,4 cm de mercure. La figure 6 donne la variation de K en fonction de P_A.

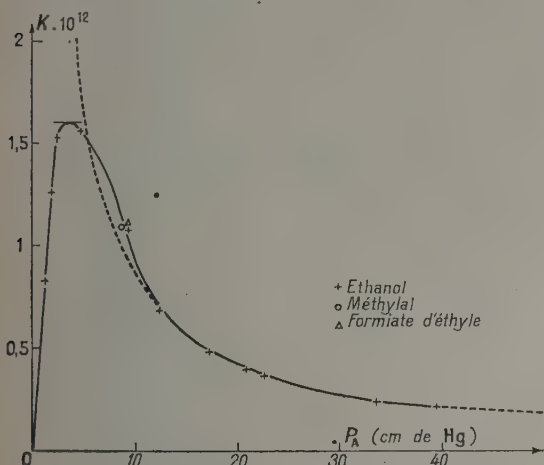


Fig. 6. — Variation du paramètre K avec la pression de l'argon.

K tend vers zéro en même temps que P_A, ce qui uggère l'utilisation de remplissages à vapeur pure, si l'on désire limiter au maximum la variation du seuil avec N_0, et confirme des mesures effectuées antérieurement [25].

Pour P_A supérieure ou égale à 12 cm de mercure, K est inversement proportionnel à P_A. La pression étant mesurée en centimètres de mercure,

$$K = \frac{8,37.10^{-12}}{P_A}.$$

L'hyperbole ainsi obtenue est représentée en pointillé sur la figure 6.

4. Variation de K avec la pression P_M du constituant polyatomique. — *a.* Une première série d'expériences a porté sur 15 compteurs placés simultanément sur la rampe de pompage. L'argon est d'abord introduit sous la pression de 3,5 cm de mercure qui correspond au maximum de la courbe $K = f(P_A)$, puis le méthylal sous des pressions allant de 0,4 à 4,8 cm de mercure.

La figure 7 donne les valeurs de K. K s'écarte nettement de la valeur prévue, pour une pression

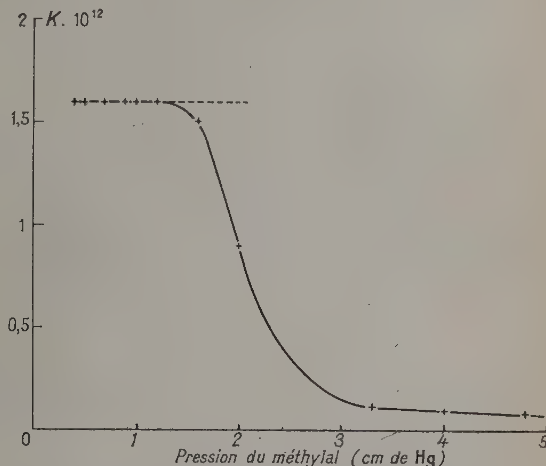


Fig. 7. — Variation de K avec la pression du méthylal (P_A = 3,5 cm de Hg).

supérieure à 1,4 cm de mercure et tend rapidement vers zéro, ce qui confirme l'intérêt des compteurs à méthylal pur.

b. Dans une seconde série de mesures, le méthylal est introduit le premier, sous pression constante, puis l'argon sous des pressions croissantes allant de 3,5 à 20 cm de mercure. Pour P_M = 2 cm de mercure, les résultats sont les suivants :

P_A cm Hg.	Valeur obtenue pour K.	Pourcentage de la valeur prévue, selon la figure 6 (pour 100).
3,2..........	$0,88.10^{-12}$	55
8,0..........	0,60	50,2
15,8..........	0,28	52,2

Le pourcentage par rapport à la valeur prévue est sensiblement constant. Cette zone de remplissages, transition entre les remplissages classiques et ceux à vapeur pure ne présente pas de grand intérêt pratique.

Application à la mesure de la résistivité du verre en fonction de la température. — Les expériences ont porté sur le Pyrex et le Novo, pour des températures supérieures à 20° C. Les compteurs sont placés dans une étuve à résistances électriques. Un thermostat fixe la température à 0°,5 près.

1. Verre « Pyrex ». — Sa résistivité à 20° C (10^{15} Ω-cm environ) rend toute mesure impossible, V_G variant trop rapidement avec N_0. A 30° C, cette variation reste rapide, mais les paliers obtenus sont longs et de pentes très faibles. La figure 8 représente

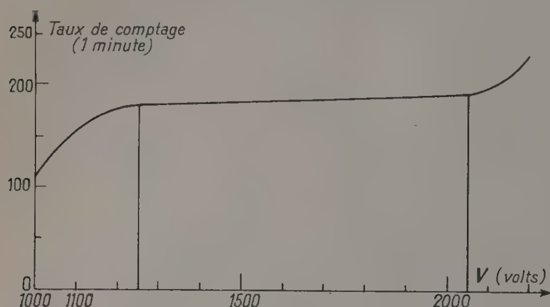


Fig. 8. — Palier, à 30° C, d'un compteur en verre Pyrex (a = 0,1 mm, b = 0,98 cm, e = 0,18 mm, L = 2,9 cm).

le palier correspondant à $N_0 = 3$ impulsions/s, pour le remplissage standard et un compteur de : a = 0,1 mm, b = 0,98 cm, e = 0,18 mm, L = 2,9 cm. Le palier, long de 800 V, présente une pente de 0,7 pour 100 par 100 V (à 30° C). Pour un taux de comptage plus grand, la longueur de palier dépasse rapidement 1000 V. Les résultats obtenus par Yasin, Ahmed et Gill [4] sont ainsi expliqués. La variation de la résistivité avec la température, déduite des valeurs de L et de $\Delta V_G = f(N_0)$ est donnée dans la figure 9.

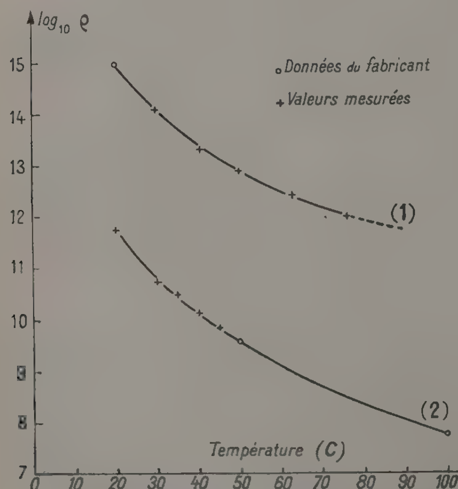


Fig. 9. — Variation avec la température de la résistivité du verre utilisé : (1), Pyrex; (2), Novo.

2. Verre « Novo ». — Les mesures sont impossibles au-dessus de 45° C, la variation de V_G avec N_0 devenant trop faible. Comme le montre la figure 9, l'accord avec les valeurs données par le fabricant est excellent.

Ces mesures constituent un contrôle des résultats donnés plus haut.

Conclusion. — Des expériences qui précèdent se déduisent les directives concernant la fabrication et l'utilisation de compteurs à graphitage externe destinés à des taux de comptage élevés.

a. Circuits de comptage. — Pour tirer le parti maximum du compteur dans la région linéaire de variation de V_G, le seuil doit être inférieur à 0,2 V. Lorsque l'intervalle de temps séparant deux impulsions successives est inférieur au temps de restitution, la taille des impulsions est plus faible, et il sera avantageux d'utiliser un seuil plus faible (quelques centièmes de volt), facile à realiser par l'introduction d'un préamplificateur simple.

b. Construction mécanique. — L'utilisation de verre UVK-1 améliore beaucoup les performances. D'autre part, il est facile d'obtenir des épaisseurs de paroi de 0,15 à 0,25 mm par étirage. Le rapport $\frac{b}{a}$ doit être aussi petit que possible : des valeurs de l'ordre de 80 sont suffisantes pour assurer au compteur des caractéristiques satisfaisantes. Il convient d'éviter une valeur trop grande pour L : on pourra, par exemple, utiliser $L = 3\,b$.

c. Remplissages. — Trois solutions sont possibles :

1° Vapeur polyatomique pure. Une étude expérimentale a été consacrée à cette question [25].

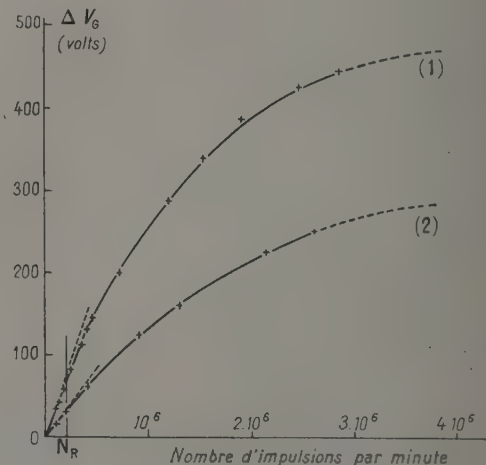


Fig. 10. — $\Delta V_G = f(N_0)$ pour un compteur UVK-1 (e = 0,25 mm, a = 0,1 mm, b = 1,075 cm, L = 3 cm).
(1) Méthylal 1 cm de Hg, Argon 8,5 cm de Hg.
(2) Méthylal 1 cm de Hg, Argon 22,5 cm de Hg.

2° Méthylal + argon sous une pression aussi grande que possible. P_A doit être inférieure à 40 cm de mercure environ, les seuils de comptage étant, au-dessus de cette valeur, trop élevés. D'autre part, la faible valeur de la charge par impulsion nécessite un seuil de circuit assez faible.

3° Remplissages pour lesquels K est plus faible que pour l'argon. C'est, en particulier, le cas des remplissages méthylal-hydrogène, dont j'ai déjà eu l'occasion de signaler l'intérêt [26].

d. Exemple de réalisation pratique. — L'exemple donné ici concerne un compteur UVK-1 de $e = 0,25$ mm, $b = 1,075$ cm, $a = 0,1$ mm, $L = 3$ cm La longueur de palier pour le fond cosmique est de 250 V.

La courbe (1) de la figure 10 correspond à un remplissage classique : méthylal sous la pression de 1 cm de mercure et argon sous la pression de 8,5 cm de mercure. ΔV_G ne dépasse pas 250 V tant que le taux de comptage reste inférieur à 10^6 impulsions/mn.

La courbe (2) de la figure 10 correspond, pour ce même compteur, à un remplissage de méthylal (1 cm de mercure) et d'argon (22,5 cm de mercure). ΔV_G ne dépasse pas 250 V tant que le taux de comptage reste inférieur à $2,6 . 10^6$ impulsions/mn. Dans la zone linéaire d'utilisation courante au-dessous de N_R, la variation de V_G est négligeable (35 V pour N_R). Malgré un seuil assez élevé (1400 V), un tel remplissage constitue une solution intéressante.

Je veux exprimer ma gratitude à M. le Professeur F. Perrin pour la bienveillance avec laquelle il a suivi ce travail, ainsi qu'à M. l'Ingénieur en Chef P. Chanson, pour l'intérêt constant qu'il a pris à la réalisation des expériences.

Je remercie M. R. Viste pour sa précieuse collaboration technique.

Manuscrit reçu le 27 avril 1955.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Maze R. — *J. Physique Rad.*, 1946, **7**, 164.
[2] Blanc D. — *J. Physique Rad.*, 1949, **10**, 411.
[3] Bassi P. et Beretta E. — *Nuovo Cimento*, 1949, **6**, 585.
[4] Yasin M., Ahmed R. et Gill P. S. — *Nature*, 1951, **167**, 647; *Indian J. Phys.*, 1951, **25**, 182.
[5] Grenon M. et Viallard R. — *J. Chim. Phys.*, 1952, **49**, 623.
[6] Favre R. et Haenny C. — *Helv. Phys. Acta*, 1953, **26**, 53.
[7] Celma M., Garcia-Fite J. A. et Segovia-Torres R. — *Ann. Real Soc. Esp. Fis. Quim.*, 1953, **49** (A), 7.
[8] Aron A. — *Z. Physik*, 1953, **134**, 622.
[9] Michalak S., Mowczan B. et Zawadski A. — *Acta Phys. Polonica*, 1954, **13**, 145.
[10] Korff S. A. — Electron and Nuclear Counters, Theory and Use. D. Van Nostrand, New-York, seconde édition 1955, p. 175.
[11] Blanc D. — *J. Physique Rad.*, 1954, **15**, 693.
[12] Blanc D. — *J. Physique Rad.*, 1953, **14**, 260.
[13] Mac-Knight M. L. et Chasson R. L. — *Rev. Sc. Instr.*, 1951, **22**, 700.
[14] Cockroft A. L. et Valentine J. M. — *J. Sc. Instr.*, 1950, **27**, 262.
[15] Grenon M. — *C. R. Acad. Sc.*, 1953, **236**, 1772.
[16] Van Rennes A. B. — *Nucleonics*, 1952, **7**, 20.
[17] Curran S. C. et Craggs J. D. — Counting tubes. Butterworths Sc. Publications, Londres, 1949, p. 21.
[18] Blanc D. et Scherer M. — *C. R. Acad. Sc.*, 1949, **228**, 2018.
[19] Baptista A. M., Cordeiro R. H. et Galvao J. P. — *Rev. Fac. Ciencias Lisboa*, 1955, **4**-B, 5.
[20] Blanc D. — *C. R. Acad. Sc.*, 1954, **239**, 1621.
[21] Blanc D. — *Nuovo Cimento*, 1955, **3**, 504.
[22] Craggs J. D., Bosley W. et Jaffe A. A. — *J. Sc. Instr.*, 1948, **25**, 67.
[23] Chaudhri M. et Fenton A. G. — *Proc. Phys. Soc.*, 1948, **60**-A, 183.
[24] Balaam N. B. — *Electr. Eng.*, 1952, **12**, 558.
[25] Blanc D. — *Nuovo Cimento*, 1954, **11**, 231.
[26] Blanc D. — *J. Physique Rad.*, 1952, **13**, 588.

SUR LES PRODUITS SCALAIRES DE FONCTIONS D'ONDE ET LES INTÉGRALES DE FOURIER RÉCIPROQUES EN MÉCANIQUE ONDULATOIRE RELATIVISTE

Par Robert POTIER,
Institut Henri Poincaré, Paris.

Sommaire. — Le but du présent article est d'étendre à la théorie générale des corpuscules à spin les résultats obtenus par M. Olivier Costa de Beauregard dans son étude explicitement covariante des solutions de l'équation de Gordon. Nous montrons que ces résultats, indépendants des équations d'onde, sont liés à des propriétés très générales du quadrivecteur courant d'univers.

Introduction. — Dans de nombreux travaux [2], [3], [4], M. Olivier Costa de Beauregard a défini de manière covariante relativiste la norme, l'orthogonalité des fonctions d'ondes, les intégrales de Fourier réciproques.

Son but était de donner à la théorie covariante de Tomonaga [12], Schwinger [10], Dyson [5] et Feynman [6] une base comparable à celle que représentait « le formalisme d'interprétation de la théorie primitive de Heisenberg-Schrödinger par rapport à la formulation hamiltonienne de la théorie quantique des champs ».

Tous les raisonnements de M. Costa de Beauregard postulaient que les fonctions d'onde de la particule obéissaient à l'équation de Gordon [4], ce qui excluait les théories des corpuscules à masses et à spins multiples (*cf.* R. Potier [7], [8], [9]).

Pour étendre ses résultats à certains corpuscules de spin spécifié (électron de Dirac, corpuscules de Kemmer), M. Costa de Beauregard [3] devait s'appuyer sur l'égalité du flux du courant de ces corpuscules et du courant de Gordon que l'on pouvait leur associer, à travers des hypersurfaces σ du genre espace. Il lui était nécessaire pour cela de s'appuyer sur les algèbres matricielles particulières associées à ces corpuscules. L'extension à d'autres corpuscules se heurtait à des difficultés considérables.

Dans ce qui suit, nous nous proposons de montrer qu'une telle extension va de soi, si l'on renonce à imposer l'équation de Gordon, à la condition de faire, sur le quadrivecteur courant d'univers des hypothèses très simples et toujours réalisées dans le cadre des théories actuellement envisagées (*cf.* [1], [7]).

1. Ondes planes. — Nous avons montré [8] que les équations générales covariantes introduites par nous en 1945 [7] définissent des corpuscules à spins et masses multiples. Une solution onde plane de ces équations sera définie par un quadrivecteur k_λ ($\lambda = 1, 2, 3, 4$), relié à l'impulsion-énergie p_λ par les formules de Louis de Broglie

$$h k_\lambda = 2\pi p_l \qquad (1)$$

et par des nombres quantiques de spin S, S_3.

On peut ainsi poser

$$\psi(k, x) = \zeta(k)\, e^{ik_\lambda x_\lambda} \qquad (2)$$

$\zeta(k)$ peut s'obtenir à partir de l'expression de l'onde plane dans le système propre, obtenue par une transformation de Lorentz qui annule k_1, k_2 et k_3. Cette onde plane, $\zeta_1\, e^{ik_4 x_4}$, dépend de la masse propre m, à laquelle on peut associer une variable k_l selon la formule.

$$h k_l = 2\pi c m_l, \qquad (3)$$

k_l change de signe quand on change le sens des x_4. Par conséquent, k_l aura la variance d'un pseudo-invariant. Dans le système propre, on a

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0, \qquad k_4 = i k_l. \qquad (4)$$

Quand on repasse au système d'axes primitif, le vecteur k_λ conserve sa longueur d'univers et l'on a

$$\sum_\lambda (k_\lambda)^2 + k_l^2 = 0; \qquad (5)$$

(5) définit dans l'espace des k un hyperboloïde associé à la masse m_l. Il est à remarquer qu'une seule des nappes de cet hyperboloïde est à considérer dans le cas général, celle correspondant à $+k_l$. La nappe définie par $-k_l$ n'intervient que si les équations sont invariantes dans tout retournement de Lorentz. Alors, avec m_l, intervient la masse $-m_l$.

Nous définirons l'élément trilinéaire de l'hyper-

boloïde (5)

$$d\eta_\lambda = -i[dk_\mu\, dk_\nu\, dk_\rho] \tag{6}$$

λ, μ, ν, ρ, une permutation circulaire de 1, 2, 3, 4.

(6) définit un pseudo-quadrivecteur auquel on associera un invariant, $d\eta$, selon la formule

$$k_\lambda\, d\eta = -k_l\, d\eta_\lambda; \tag{7}$$

k_λ est, en effet, colinéaire à l'élément $d\eta_\lambda$, car

$$\Sigma k_\lambda\, dk_\lambda = 0, \tag{8}$$

k_λ est normal à l'hyperboloïde et $d\eta_\lambda$ aussi.

Dans l'espace-temps, nous considérerons les hypersurfaces σ du genre espace, dont l'élément trilinéaire sera

$$d\sigma_\lambda = -i[dx_\mu\, dx_\nu\, dx_\rho], \tag{9}$$

λ, μ, ν, ρ, permutation circulaire de 1, 2, 3, 4.

2. Conséquences de l'existence d'un quadrivecteur réel et à divergence nulle. — Nous avons donné [7], les expressions générales du quadrivecteur-courant réel, de divergence 4-dimensionnelle nulle, pour les particules de spins et de masses multiples. Dans ce qui suit, il ne sera pas nécessaire d'utiliser le détail de ces expressions. Il suffira de faire les hypothèses suivantes :

1° Un quadrivecteur, forme bilinéaire de la fonction d'onde ψ et de la fonction conjuguée Φ d'une autre fonction d'onde Φ existe, soit $v(\bar{\Phi}, \psi)$

$$v(\bar{\psi}, \psi) \quad \text{est réel};$$

2° Les équations d'onde entraînent

$$\operatorname{div}_4 v(\bar{\Phi}, \psi) = 0; \tag{10}$$

3° Si Φ et ψ représentent deux fonctions d'onde planes définies par le même k_λ (donc de même quantité de mouvement et énergie), et si Φ et ψ représentent des cas purs différents de spin dans le système propre (par exemple S^2 et S_3 différents, ou S^2 égaux et S_3 différents), on a

$$v(\bar{\Phi}, \psi) = 0.$$

Les conditions 1°, 2° et 3° sont réalisées par les quadrivecteurs de notre théorie [7] ainsi que par ceux de toutes autres théories à notre connaissance.

A partir de ces hypothèses on peut démontrer plusieurs lemmes.

LEMME 1. — *On a*

$$v(\bar{\Phi}, \psi) = [v(\bar{\psi}, \Phi)]^*.$$

En effet, $v(\bar{\psi}_1 + \lambda^* \bar{\psi}_2, \psi_1 + \lambda\psi_2)$ *est réel. Donc*

$$v(\bar{\psi}_1, \psi_1) + \lambda\lambda^* v(\bar{\psi}_2, \psi_2) + \lambda^* v(\bar{\psi}_2, \psi_1) + \lambda v(\bar{\psi}_1, \psi_2) \quad \textit{est réel.}$$

Posons, par exemple, $\lambda = 1$; il suit que

$$v(\bar{\psi}_2, \psi_1) + v(\bar{\psi}_1, \psi_2) \quad \textit{est réel.}$$

Si $\lambda = i$, on voit que

$$v(\bar{\psi}_2, \psi_1) - v(\bar{\psi}_1, \psi_2) \quad \text{est imaginaire pur.}$$

Deux complexes de somme réelle et de différence imaginaire pure sont conjugués. Donc

$$v(\bar{\psi}_2, \psi_1) = [v(\bar{\psi}_1, \psi_2)]^*.$$

On peut donc écrire

$$\iiint v_\mu(\bar{\psi}_2, \psi_1)\, d\sigma_\mu = \iiint_\sigma [v_\mu(\bar{\psi}_1, \psi_2)]^*\, d\sigma_\mu$$

ou autrement dit

$$\langle \psi_2 | \psi_1 \rangle = [\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle]^*. \tag{11}$$

LEMME 2. — *Soient deux fonctions d'onde planes*

$$\psi = \zeta\, e\left(\vec{k}.\vec{x} + k_4 x_4\right) \qquad \text{et} \qquad \Phi = \omega\, e\left(\vec{k}.\vec{x} + k'_4 x'_4\right),$$

où la valeur de $\vec{k}$ est la même dans les deux expressions ζ et ω étant deux constantes.

On a

$$v_4(\bar{\psi}, \Phi) = 0 \qquad \text{si} \qquad k'_4 \neq k_4.$$

En effet,

$$v(\bar{\psi}, \Phi) = e[(k'_4 - k_4)x_4]\, v(\bar{\zeta}, \omega),$$

$$\operatorname{div}_4 v = i(k'_4 - k_4)\, e[(k'_4 - k_4)x_4]\, v_4(\bar{\zeta}, \omega) = 0,$$

ce qui entraîne

$$v_4(\bar{\zeta}, \omega) = 0, \qquad \text{d'où} \qquad v_4(\bar{\psi}, \Phi) = 0.$$

LEMME 3. — *Si $\psi = \zeta\, e(k_\lambda x_\lambda)$ est une fonction d'onde plane, $v(\bar{\psi}, \psi)$ est colinéaire au quadrivecteur k. On peut, en effet, se ramener dans le système propre par une transformation de Lorentz. Si la proposition est vraie dans ce système, elle sera vraie en général (les deux quadrivecteurs se transforment de manière équivalente).*

Formons $v(\bar{\psi}, \psi_0)$, ψ étant donnée par $\zeta\, e(k_\lambda x_\lambda)$ et $\psi_0 = \zeta_0\, e(k_0 x_4)$ (ces deux fonctions appartenant aux mêmes états de masse et de spin), d'où

$$v(\bar{\psi}, \psi_0) = e\left[(k_0 . k_4)x_4 - \vec{k}.\vec{x}\right] v(\bar{\zeta}, \zeta_0),$$

$$\operatorname{div}_4 v(\bar{\psi}, \psi_0) = e\left[(k_0 - k_4)x_4 - \vec{k}.\vec{x}\right] \times \left[(k_0 - k_4)v_4(\bar{\zeta}, \zeta_0) - k_\alpha v_\alpha(\bar{\zeta}, \zeta_0)\right]$$

$$\text{avec} \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

d'où

$$0 = (k_0 - k_4)v_4(\bar{\zeta}, \zeta_0) \quad k_\alpha v_\alpha(\bar{\zeta}, \zeta_0).$$

Faisons tendre les k_α vers zéro, k_4 tend vers k_0. On sait que si les k_α sont du premier ordre, $k_0 - k_4$ est du second ordre. Il faut donc que les

trois v_α tendent eux aussi vers zéro. D'où

$$v_\alpha(\bar{\zeta}_0, \zeta_0) = 0.$$

Si l'on suppose que $v_4(\bar{\zeta}_0, \zeta_0)$ est non nul (nous ferons, en général, dans ce qui suit cette hypothèse), la colinéarité de $v(\bar{\psi}_0, \psi_0)$ et du quadrivecteur 0, 0, 0, k_0 est bien démontrée. Notre lemme l'est aussi.

3. Égalité de Parseval. — Posons

$$\psi_{(x)} \equiv (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \iiint_{\eta_l} \exp(ik_\lambda x_\lambda)\,\zeta_{m_l,S,S_3}(k)\,\mathrm{d}\eta_l. \quad (12)$$

η_l est l'hyperboloïde

$$\left.\begin{array}{c}\eta_l \equiv k_\lambda k^\lambda + k_l^2 = 0 \\ [\text{ou } \eta_l \equiv (k_\lambda)^2 + k_l^2 = 0],\end{array}\right\} \quad (13)$$

relatif à l'état de masse propre m_l. k_l est un pseudo-invariant dont nous avons déjà parlé, S et S_3 définissent les états de spin de ζ, ramenée au système propre.

Considérons la fonction d'onde

$$\Phi = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \iiint_{\eta_l} \exp(ik_\lambda x_\lambda)\,\omega_{m_l,S,S_3}(k)\,\mathrm{d}\eta_l; \quad (14)$$

dans les formules (12) et (14), il convient de faire la sommation sur toutes les valeurs de l, de S et de S_3.

Cherchons à calculer l'intégrale

$$\mathcal{J} = \iiint_\sigma v_\lambda(\bar{\Phi}, \psi)\,\mathrm{d}\sigma_\lambda = \langle \Phi \mid \psi \rangle. \quad (15)$$

La relation $\mathrm{div}_4\, v = 0$ entraîne que cette intégrale ne dépend pas de σ. Donc, on peut prendre pour σ l'hyperplan $x_4 = 0$.

(15) devient

$$\mathcal{J} = (2\pi)^{-3} \iiint_{x_4=0} -iv_4 \left[\iiint_{\eta_l} \exp(-ik_\lambda x_\lambda)\bar{\omega}_{m_l,S,S_3}(k)\mathrm{d}\eta_l, \iiint_{\eta_{l'}} \exp(ik'_\lambda x_\lambda)\zeta_{m_{l'},S',S'_3}(k')\mathrm{d}\eta_{l'}\right]\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 \quad (16)$$

Dans (16), le coefficient $-i$ vient de

$$\mathrm{d}\sigma_4 = -i\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3.$$

On doit faire la sommation sur tous les états de masse et de spin, donc sur tous les indices l et l', sur S_3, S, S', S'_3.

v_4 étant une forme bilinéaire, on peut sortir les exponentielles, de même on peut sortir les signes $\iiint_{\eta_l}$ et $\iiint_{\eta_{l'}}$. On peut également permuter $\iiint_{x_4=0}$ avec $\iiint_{\eta_l}$ et $\iiint_{\eta_{l'}}$, en vertu des propriétés bien connues des intégrales multiples.

On obtient finalement

$$\mathcal{J} = -(2\pi)^{-3} \times i\iiint_{\eta_l}\iiint_{\eta_{l'}}\iiint_{x_4=0} \exp[i(k'_\lambda - k_\lambda)x_\lambda] \times v_4[\bar{\omega}_{m_l,S,S_3}(k), \zeta_{m_{l'},S',S'_3}(k')]\mathrm{d}x_1\,dx_2\,dx_3\,d\eta_{l'}\,d\eta_l \quad (17)$$

Pour calculer $\mathcal{J}$, cherchons la valeur de $\mathcal{J}_1$, d'expression analogue, mais où nous limitons l'hyperplan $x_4 = 0$ à l'intérieur d'une boîte

$$-X_1 < x_1 < +X_1;\ -X_2 < x_2 < X_2;\ -X_3 < x_3 < X_3$$

pour obtenir la valeur de $\mathcal{J}$, nous ferons tendre ensuite X_1, X_2 et X_3 vers l'infini.

Nous obtenons

$$\mathcal{J}_1 = -(2\pi)^{-3} i \iiint_{\eta_l}\iiint_{\eta_{l'}} 8 \times \frac{\sin(k'_1 - k_1)X_1 \sin(k'_2 - k_2)X_2 \sin(k'_3 - k_3)X_3}{(k'_1 - k_1)(k'_2 - k_2)(k'_3 - k_3)} \times v_4(\bar{\omega}, \zeta)\,\mathrm{d}\eta_l\,\mathrm{d}\eta_{l'}. \quad (18)$$

Intégrons sur $\eta_{l'}$, en tenant compte de

$$\mathrm{d}\eta_{l'} = i\frac{k_{l'}}{k'_4}\mathrm{d}k'_1\,\mathrm{d}k'_2\,\mathrm{d}k'_3.$$

Remarquons que η_l est *une nappe d'hyperboloïde*, correspondant à *une valeur définie* du pseudo-invariant k_l, la nappe η_l correspondant à la valeur $-m_l$, de la masse propre étant associée à la valeur $-k_l$ du pseudo-invariant (ceci dans le cas d'une théorie où les masses $\pm m$ existent toujours, ce n'est pas nécessaire à notre démonstration).

Faisons également tendre X_1, X_2 et X_3 vers l'infini. Il vient

$$\mathcal{J}_1 \to \mathcal{J} = \iiint_{\eta_l} \frac{k_{l'}}{k'_4} v_4\Big[\bar{\omega}_{m_l,S,S_3}(\vec{k}, k_4), \zeta_{m_{l'},S',S'_3}(\vec{k}, k'_4)\Big]\mathrm{d}\eta_l. \quad (19)$$

D'après notre lemme 2, v_4 est nul si $k'_4 \neq k_4$.

Les seules contributions non nulles dans l'intégrale (19) proviennent des $v_4(\bar{\omega}, \zeta)$ où $k_\lambda = k'_\lambda$, quel que soit λ. Donc la masse propre a la même valeur pour les ondes planes ω et ζ, et $l = l'$ (nous remarquons que par masse propre, nous entendons la quantité m_l liée au pseudo-invariant k_l par $hk_l = 2\pi\, cm_l$).

D'autre part, notre condition 3° annule toutes les contributions provenant des $S \neq S'$ et $S_3 \neq S'_3$.

Finalement, nous obtenons

$$I = \iiint_{\eta_l} \frac{k_l}{k_4} v_4[\bar{\omega}_{m_l,S,S_3}(k_\lambda), \zeta_{m_l,S,S_3}(k_\lambda)]\mathrm{d}\eta_l \quad (20)$$

Considérons maintenant l'intégrale

$$J = \iiint_{\eta_l} v_\lambda[\bar{\omega}_{m_l,S,S_3}(k_\lambda), \zeta_{m_l,S,S_3}(k_\lambda)]\,\mathrm{d}\eta_{l\lambda} = \langle \omega \mid \zeta \rangle \quad (21)$$

où $\mathrm{d}\eta_l$ est le pseudo-quadrivecteur infinitésimal élément de la variété η_l et où il faut sommer sur λ,

l, S et S_3. Dans J, l'élément sous le signe $\iiint$ est un pseudo-invariant, donc n'est pas affecté par une rotation de Lorentz. De même l'élément sous le signe $\iiint$ de $\mathcal{J}$ n'est pas affecté par une telle rotation. En effet v est colinéaire à k, d'après notre lemme 3. $\frac{v_4}{k_4}$ est donc un invariant : le coefficient numérique de proportionnalité de v et k; $d\eta_l$ est un invariant, et k_l un pseudo-invariant. L'ensemble a donc la variance de l'élément de J.

Les fonctions d'onde du corpuscule définies par $\omega(k_\lambda)$ et $\zeta(k_\lambda)$ admettent le même système propre de coordonnées. En effet, les valeurs de k_λ qui les définissent sont les mêmes, et la masse propre est définie à partir du même k_l.

Passons dans ce système propre. Nous avons, alors

$$k_4 = i k_l, \qquad v_1 = v_2 = v_3 = 0, \qquad d\eta_l = i\, d\eta_{l4}.$$

Les éléments sous le signe $\iiint$ de $\mathcal{J}$ et J se réduisent alors à leur valeur commune

$$v_4\, d\eta_{l4}.$$

Ils sont donc égaux toujours, puisque invariants dans toute rotation de Lorentz et finalement on a

$$\mathcal{J} = J$$

ou

$$\langle \Phi \mid \psi \rangle = \langle \omega \mid \zeta \rangle = \iiint_\sigma v_\lambda(\overline{\Phi}, \psi)\, d\sigma_\lambda$$

$$= \iiint v_\lambda[\overline{\omega}_{m_l, S, S_3}(k), \zeta_{m_l, S, S_3}(k)]\, d\eta_{l\lambda}; \quad (22)$$

(22) est l'expression covariante de l'égalité de Parseval.

4. Intégrales de Fourier réciproques. — Pour inverser l'intégrale de Fourier (12), il convient de séparer le problème d'analyse ainsi posé du problème d'algèbre constitué par la détermination des solutions ondes planes de l'équation d'ondes.

Nous supposerons que pour chaque valeur de m_l, k, S, S_3 une certaine fonction d'onde $\zeta_{0m_l, S, S_3}(k)\, e(kx)$ est définie.

Tout ζ appartenant aux mêmes nombres quantiques s'écrira,

$$\zeta = \rho\, \zeta_0. \quad (23)$$

ρ sera une fonction de k, m_l, S, S_3. Le choix de ζ_0 sera fixé par la suite; dans la formule (22), ω appartenant aux mêmes nombres quantiques que ζ, on aura

$$\omega = \rho' \zeta_0, \quad (24)$$

d'où

$$\Phi = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \iiint_{\eta_l} \exp(i k_\lambda x_\lambda)\, \rho'_{m_l, S, S_3}(k)\, \zeta_{0m_l, S, S_3}(k)\, d\eta_l. \quad (25)$$

Nous écrirons (22) avec une fonction Φ très particulière, où n'interviendront que des k voisins d'une valeur déterminée et où

$$\iiint_{\eta_l} \rho'(k)\, d\eta_l = 1. \quad (26)$$

Pratiquement nous supposerons que tous les k de l'intégrale (25) sont égaux, mais que l'intégrale (25) a une valeur finie, ce qui revient à prendre pour $\rho'(k)$ une fonction singulière analogue à la fonction δ de Dirac.

L'intégrale triple du second membre de (22) devient

$$\mathcal{J} = \iiint_{\eta_l} \rho'^*(k)\, \rho(k)\, v_\lambda[\overline{\zeta}_{0m_l, S, S_3}(k), \zeta_{0m_l, S, S_3}(k)]\, d\eta_{l\lambda}. \quad (27)$$

Mais

$$d\eta_{l\lambda} = -\frac{k_\lambda}{k_l}\, d\eta_l$$

et, d'autre part, on peut sortir du signe $\iiint$, la quantité $\rho(k)$ et tenir compte de (26), qui donne

$$\iiint_{\eta_l} \rho'^*(k)\, d\eta_l = 1.$$

Il vient

$$\mathcal{J} = -\frac{\rho(k)}{k_l}\, k_\lambda v_\lambda; \quad (28)$$

$k_\lambda v_\lambda$ est un invariant que l'on peut évaluer dans le système propre, sa valeur est alors $k_4 v_4$.

On choisira les fonctions ζ_0 de telle façon que $v_4(\zeta_0, \zeta_0)$, *dans le système propre*, soit égale à $i\varepsilon = \pm i$.

Alors $k_4 = ik_l$ et l'on a

$$\mathcal{J} = \rho\varepsilon. \quad (29)$$

Mais (26) et (25) donnent

$$\Phi = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \zeta_0 \exp(i k_\mu x_\mu) \quad (30)$$

et la substitution de (30) dans le premier membre de (22) donne

$$\mathcal{J} = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \iiint_\sigma \exp(-i k_\mu x_\mu)\, v_\lambda(\overline{\zeta}_0, \psi)\, d\sigma_\lambda, \quad (31)$$

d'où

$$\rho = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \varepsilon \iiint_\sigma \exp(-i k_\mu x_\mu)\, v_\lambda(\overline{\zeta}_0, \psi)\, d\sigma_\lambda. \quad (32)$$

Si nous posons

$$\xi = \exp(i k_\mu x_\mu)\, \zeta_0,$$

Cela peut s'écrire

$$\rho = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \varepsilon \langle \xi \mid \psi \rangle, \quad (33)$$

ce qui permet de déterminer

$$\zeta = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \varepsilon \langle \xi \mid \psi \rangle \zeta_0. \quad (34)$$

5. **Résolution du problème de Cauchy.** — On peut porter la valeur (34) de ξ dans l'équation (12). On obtient

$$\psi_{(x)} = (2\pi)^{-3} \iiint_{\eta_l} \exp(ik_\lambda x_\lambda)\varepsilon\langle\xi\,|\,\psi\rangle\zeta_0\,d\eta_l; \quad (35)$$

(35) peut aussi s'écrire

$$\psi_{(x)} = (2\pi)^{-3} \iiint_{\eta_l} \iiint_{\sigma'} \varepsilon\zeta_0 \times \exp[ik_\lambda(x_\lambda - x'_\lambda)]v_\mu[\bar\zeta_0, \psi_{(x')}]\,d\sigma'_\mu\,d\eta_l.$$

Posons

$$S_\mu(x - x')\psi(x') = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \iiint_{\eta_l} \varepsilon\zeta_0 \times \exp[ik_\lambda(x_\lambda - x'_\lambda)]v_\mu(\bar\zeta_0, \psi_{(x')})\,d\eta_l; \quad (36)$$

$S_\mu(x - x')$ est un opérateur linéaire.

Moyennant (36), (35) devient

$$\psi_{(x)} = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \iiint_{\sigma'} S_\mu(x - x')\psi(x')\,d\sigma'_\mu. \quad (37)$$

On peut chercher à préciser la forme de $S_\mu(x - x')$ en introduisant une fonction qui généralise la fonction singulière $D(x - x')$ de Stueckelberg-Schwinger [11], [10]. Considérons d'abord les quatre opérateurs linéaires A_μ intervenant dans les formules

$$\varphi_\mu = A_\mu\psi \quad (38)$$

les φ_μ étant données par

$$\varphi_\mu = \zeta_0 v_\mu(\bar\zeta_0, \psi). \quad (39)$$

Les v_μ sont quatre formes bilinéaires, les ζ_0 sont des fonctions de k et des nombres quantiques. On peut montrer que les ζ_0 ont pour composantes des *polynomes* en k_λ. (Les $\psi^{\rho l}_{rs}$, représentations irréductibles du groupe de Lorentz introduites dans nos Notes déjà citées se transforment selon des formules dont les coefficients sont des polynomes en k_λ.)

(38) et (39) jointes à (36) donnent

$$S_\mu(x - x') = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \iiint_{\eta_l} \varepsilon \times \exp[ik_\lambda(x_\lambda - x'_\lambda)]A_\mu(k_\nu)\,d\eta_l. \quad (40)$$

Si l'on pose

$$D(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \iiint_{\eta_l} \varepsilon \exp(ik_\lambda x_\lambda)\,d\eta_l \quad (41)$$

(où l'on doit sommer sur tous les indices l, c'est-à-dire sur tous les états de masse); on a

$$S_\mu(x) = A_\mu(-i\partial_\nu)D(x). \quad (42)$$

La formule (37) peut donc s'écrire

$$\psi_{(x)} = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \iiint_{\sigma'} A_\mu(-i\partial_\nu)D(x - x')\psi(x')\,d\sigma'_\mu. \quad (43)$$

On peut aussi se servir des A_μ pour exprimer simplement la formule d'inversion (34), soit

$$\zeta = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\varepsilon \iiint_{\sigma} \exp(ik_\lambda x_\lambda)A_\mu\psi\,d\sigma_\mu. \quad (44)$$

Les A_λ sont naturellement fonction, outre de k, des autres nombres quantique m_l, S, S_3.

Manuscrit reçu le 6 janvier 1955.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Broglie L. de. — Théorie générale des particules à spin. Paris, 1942.

[2] Costa de Beauregard O. — *C. R. Acad. Sc.*, 1947, **225**, 626; 1951, **232**, 804; 1953, **237**, 1945; 1954, **238**, 50 et 1196; *Phys. Rev.*, 1951, **83**, 182. — Particules fondamentales et noyaux (*Colloques internationaux du C. N. R. S.*, 1953, p. 207-216). — *J. Physique Rad.*, 1954, **15**, 810.

[3] Costa de Beauregard O. — Séminaire de théories physiques de M. Louis de Broglie, 1954-1955, exposé nº 1.

[4] Costa de Beauregard O. — *C. R. Acad. Sc.*, 1954, **239**, 1357.

[5] Dyson F. J. — *Phys. Rev.*, 1949, **75**, 486-502.

[6] Feynman R. P. — *Phys. Rev.*, 1949, **76**, 749-759 et 769-789.

[7] Potier R. — *C. R. Acad. Sc.*, 1946, **222**, 636, 855 et 1076.

[8] Potier R. — *C. R. Acad. Sc.*, 1949, **227**, 1146; 1949, **228**, 656.

[9] Potier R. — *C. R. Acad. Sc.*, 1951, **232**, 1538, 1647 et 1736.

[10] Schwinger. — *Phys. Rev.*, 1948, **74**, 1439-1461 et 1949, **75**, 651-679.

[11] Stueckelberg E. C. G. — *Arch. Sc. Phys. Nat.*, Genève, 1939, **56**, nº 1.

[12] Tomonaga S. I. — *Progr. Théor. Phys.*, 1946, **1**, 27.

RELATION ENTRE LA PRESSION ET LA TEMPÉRATURE D'ÉBULLITION ET DÉTERMINATION DE L'ENTROPIE MOLÉCULAIRE D'ÉBULLITION

Par JOVANKA M. ŽIVOJINOV,
Assistante à l'École polytechnique de Belgrade,
Institut de Physique.

Sommaire. — En continuant les recherches de D. Milosavljević, nous avons trouvé l'exposant n de l'équation reliant la température réduite et la pression réduite pour quelques substances. Puis, à l'aide de ce dernier, nous avons calculé les entropies moléculaires d'ébullition pour ces mêmes substances. Elles correspondent mieux aux résultats expérimentaux que les valeurs obtenues par l'équation de Wartenberg.

D. Milosavljević [1], [2] a proposé l'équation

$$\ln \frac{p_k}{p} = a\left[\left(\frac{T_k}{T}\right)^n - 1\right]. \qquad (1)$$

qui donne la relation entre la pression et la température d'ébullition correspondante, où p_k (kg/cm²) est la pression critique et p (kg/cm²) celle d'ébullition; T_k (°K) la température critique, T (°K) celle d'ébullition, tandis que a est une constante universelle, dont la valeur est 6,55. L'exposant n est une quantité caractéristique pour chaque substance traitée.

En poursuivant les recherches dans ce domaine [3], nous avons trouvé que l'intervalle d'application de l'équation (1) se trouve entre le point triple et le point critique [4], [5]. Dans ce travail nous avons déterminé d'abord l'exposant n pour quelques substances. Les résultats se trouvent groupés dans le tableau I. Comme le montre celui-ci, les écarts de

TABLEAU I.

La tension de la vapeur saturée pour quelques substances.

Substance.	T (°K).	T_k (°K).	p (kg/cm²).	p_k (kg/cm²).	$\ln \frac{p_k}{p}$.	$\frac{T_k}{T}$.	n.	n moyenne.
H_2	20,34	33,18	1,033	13,22	2,549	1,631	0,6717	
	27,22	33,18	5,039	13,22	0,9646	1,219	0,6939	0,6910
	32,02	33,18	11,18	13,22	0,1672	1,036	0,7076	
N_2	63,30	126,03	0,131	34,60	5,576	1,991	0,8943	
	77,00	126,03	0,991	34,60	3,553	1,616	0,8795	0,8842
	78,00	126,03	1,114	34,60	3,436	1,615	0,8789	
HCl	159,34	324,66	0,141	84,40	6,398	2,035	0,9588	
	188,16	324,66	1,033	84,40	4,404	1,725	0,9427	0,9456
	241,16	324,66	10,33	84,40	2,100	1,346	0,9353	
$C_2H_5OC_2H_5$	171,56	466,96	$5.792 \cdot 10^{-6}$	35,52	13,327	2,917	1,037	
	307,76	466,96	1,033	35,52	3,570	1,517	1,044	1,041
	443,16	466,96	24,57	35,52	0,369	1,054	1,042	
NH_3	233,16	406,16	0,732	119,82	5,066	1,742	1,032	
	283,16	406,16	6,271	119,82	2,950	1,434	1,031	1,033
	323.16	406,16	20,727	119,82	1,754	1,256	1,038	
C_2H_5OH	270,46	516,26	0,0136	63,10	8,446	1,908	1,281	
	353,16	516,26	1,104	63,10	4,045	1,462	1,268	1,266
	393,16	516,26	4,383	63,10	2,667	1,313	1,254	
H_2O	273,16	647,36	0,00623	225,5	10,49	2,370	1,108	
	373,16	647,36	1,033	225,5	5,386	1,735	1,089	1,094
	473.16	647,36	15,84	225,5	2,656	1,368	1,085	

valeur pour l'exposant n se trouvent dans les limites des erreurs expérimentales pour p, T et p_k, T_k.

Pour la chaleur de vaporisation, D. Milosavljević [6] a donné l'expression suivante :

$$r = \frac{1{,}987}{M} an T\left(\frac{T_k}{T}\right)^n \quad \text{(kcal/kg)}, \qquad (2)$$

où M est le poids moléculaire de la substance traitée. A l'aide de cette équation on peut calculer les chaleurs de vaporisation de différents corps aux vapeurs desquels on peut appliquer approximativement l'équation de l'état des gaz parfaits (températures assez éloignées de la température critique).

L'équation (2) donne, pour l'entropie moléculaire d'ébullition, l'expression

$$\frac{Mr}{T_e} = 1{,}987 an\left(\frac{T_k}{T}\right)^n \quad \text{(kcal/kg-mol° K)}, \qquad (3)$$

où T_e (°K) est la température d'ébullition à pression normale. Nous avons appliqué ensuite l'expression (3) pour calculer l'entropie moléculaire pour quelques substances en prenant pour la constante n les valeurs indiquées dans le tableau I. Les résultats sont donnés dans le tableau II, où l'on trouve aussi les valeurs expérimentales, ainsi que les valeurs obtenues par la formule suivante de Wartenberg :

$$\frac{Mr}{T_e} = 7{,}4 \log T_e + 1{,}98 \quad \text{(kcal/kg-mol° K)}. \qquad (4)$$

Tableau II.

L'entropie moléculaire d'ébullition pour quelques substances.

Substance.	T_e (° K).	$\frac{T_k}{T_e}$.	$\frac{Mr}{T_e}$ expérimental.	D'après l'équation (3).	D'après l'équation (4).
H_2	20,4	1,63	10,8	12,61	11,7
N_2	77,3	1,66	17,3	17,69	15,9
HCl	181,1	1,72	20,7	20,60	18,8
$C_2H_5OC_2H_5$	307,8	1,52	20,2	20,91	20,4
NH_3	239,8	1,7	23,4	23,17	19,6
C_2H_5OH	351	1,46	27,2	26,81	20,8
H_2O	373	1,735	26,0	26,02	21,0

On voit que l'entropie moléculaire d'ébullition (tableau II) déduite de l'équation (3) s'accorde mieux avec les résultats expérimentaux que les valeurs obtenues de l'équation de Wartenberg. Récemment (4), nous avons constaté qu'appliquant la règle de Trouton, on obtient les écarts encore plus grands.

Dans nos recherches antérieures [4], [5], nous avons obtenus, en partant de l'équation (2), de très bons résultats pour la chaleur de vaporisation de l'alcool et de l'éthyl-éther à leurs températures d'ébullition ($p = 76$ cm Hg). Pour les températures plus hautes et plus basses que celle-ci, nous avons constaté de grands écarts absolus entre nos valeurs, tirées de l'équation (2), et les valeurs expérimentales. En même temps, nous concluons que D. Milosavljević [6] n'avait pas raison d'affirmer que la plus grande valeur de la chaleur de vaporisation pour l'eau à 0° C doit être 561 kcal/kg au lieu de 597,1 kcal/kg [8], car nous avons montré que l'équation (2) n'est plus valable pour cette température.

Manuscrit reçu le 26 janvier 1955.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Milosavljević D. — *C. R. Acad. Sc.*, 1947, **224**, 1345.
[2] Milosavljević D. — *Bull. Soc. Chim.*, Belgrade, 1949, **1**, 14.
[3] Živojinov J. — *Bull. Soc. Chim.*, Belgrade, 1949, **1-2**, 13.
[4] Živojinov J. — *Bull. Soc. Chim.*, Belgrade, 1952, **2**, 17.
[5] Živojinov J. — *Bull. Soc. Chim.*, Belgrade, 1953, **4**, 18.
[6] Milosavljević D. — *Bull. Soc. Chim.*, Belgrade, 1949, **1**, 14.
[7] Roberts J. K. — Heat and Thermodynamics. London and Glasgow, 1949, p. 189.
[8] d'Ans J. et Lax E. — *Taschenbuch für Chemiker und Physiker*. Berlin, Göttingen et Heidelberg, 1949.

L'ÉLECTROMÈTRE A CONDENSATEUR VIBRANT

Par Michel BRIÈRE et Jacky WEILL,
Service des Constructions électriques,
Centre d'Études nucléaires de Saclay.

Sommaire. — Les auteurs donnent aux lecteurs intéressés des indications sur la réalisation d'un électromètre à condensateur vibrant.

On trouvera une étude mathématique du problème aboutissant à des données électromécaniques concrètes et enfin la description détaillée d'un électromètre à condensateur vibrant réalisé au C. E. A., permettant d'apprécier une tension continue de $100\,\mu V$ aux bornes d'une résistance pouvant atteindre $10^{12}\,\Omega$, avec une dérive de 0,1 à 0,5 mV par jour, et de déceler des courants $< 10^{-16}$ A par mesure du temps de charge d'une capacité-étalon.

Généralités. — Dans le domaine de la Physique expérimentale, de nombreuses manipulations nécessitent l'enregistrement en permanence de très faibles courants continus dont la valeur se situe couramment dans une gamme s'étendant de 10^{-10} à 10^{-15} A. Éventuellement, il est également nécessaire d'obtenir le déclenchement de dispositifs de sécurité à partir de tels courants.

Les amplificateurs à courant continu conviennent pour cet usage, mais présentent le défaut bien connu d'une dérive continuelle dans le temps. Leur limite d'utilisation semble être d'environ 10^{-13} A pour toute l'échelle; lorsque les enregistrements doivent porter sur des courants inférieurs, l'effet de dérive devient important et rend ainsi les amplificateurs à couplage direct difficilement utilisables.

Il est possible de transformer au préalable les tensions ou courants continus que l'on veut mesurer en tensions alternatives de façon à pouvoir utiliser des amplificateurs ordinaires à couplage par capacité ou par induction qui sont exempts de dérive.

Pour effectuer cette conversion, un procédé utilisable est celui d'une modulation par variation de capacité, procédé purement électrostatique, qui a déjà donné lieu à un certain nombre de publications ([1], [2], [3]) et dont nous rappellerons brièvement le principe (*fig.* 1).

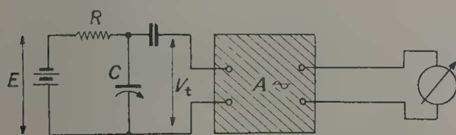


Fig. 1. — Schéma de principe élémentaire.

La tension continue à mesurer, E, est transmise à travers une grande résistance à un condensateur C dont on fait varier périodiquement la capacité au moyen d'un dispositif mécanique. Si la constante de temps CR est grande devant la période de variation de capacité, on obtiendra aux bornes de C une composante alternative, v, dont l'amplitude est proportionnelle à la tension continue appliquée, et dont la phase diffère de 180° selon la polarité de cette tension.

Le rapport $\frac{v}{E}$ est appelé « *taux ou rendement de conversion* » du condensateur.

La tension alternative obtenue sera amplifiée au moyen d'un amplificateur ordinaire (*fig.* 1).

Un tel système n'est pas cependant exempt d'effets de dérive. Il subsiste en effet une dérive provenant du condensateur de conversion et due aux variations lentes du potentiel d'extraction de ses armatures. Nous verrons que cette dérive peut être rendue très inférieure à celle d'un amplificateur à courant continu.

Le condensateur vibrant a par ailleurs une résistance d'entrée pratiquement infinie, celle-ci n'étant limitée que par les possibilités d'isolement du condensateur de conversion, tandis que l'amplificateur à courant continu est limité au point de vue résistance d'entrée par le courant grille de la lampe-électromètre employée.

Formes pratiques de réalisation. — Le condensateur de conversion peut en principe être du type tournant ou du type vibrant.

Le condensateur tournant a pour principal avantage d'avoir un rendement de conversion élevé et constant. Par contre, il a l'inconvénient de nécessiter un contact glissant ou un contact au mercure pour maintenir l'armature mobile à un potentiel fixe; or un tel contact est une source de fluctuations parasites, d'où un bruit de fond prohibitif.

Dans le condensateur vibrant, il n'y a plus besoin de contact glissant avec l'armature mobile. Quoique le rendement de conversion obtenu soit faible et fonction de l'amplitude de vibration, le condensateur vibrant est le seul système à être pratiquement utilisé en raison de l'absence d'usure et d'entretien.

Cependant, le signal alternatif produit n'étant pas

uniquement fonction de la tension continue appliquée, mais également du rendement de conversion du condensateur vibrant (variable avec l'amplitude de vibration) et le gain de l'amplificateur pouvant varier, le simple schéma de principe de la figure 1 doit être perfectionné afin de rendre la précision des mesures indépendante des performances du condensateur vibrant et de l'amplificateur. Deux dispositions sont généralement utilisées.

a. Solution électrique a contre-réaction de tension continue (*fig.* 2). — Dans ce système, on utilise la contre-réaction de tension continue.

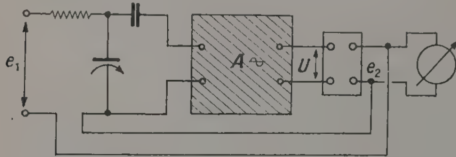


Fig. 2. — Système à contre-réaction de tension continue.

La tension alternative amplifiée (dont la phase diffère de 180° selon le sens de la tension continue appliquée) est redressée au moyen d'un détecteur discriminateur de phase, et la tension continue qui en résulte est renvoyée en contre-réaction à l'entrée. De ce fait, la contre-réaction agit non seulement pour compenser les variations de gain de l'amplificateur, mais également les variations de rendement du condensateur vibrant.

En effet, soient :

n, rendement de conversion du condensateur vibrant;

A, gain de l'amplificateur alternatif;

d, caractéristique de transformation du détecteur $= \frac{e_2}{U}$, (U, tension alternative de sortie; e_2, tension continue de sortie).

On aura pour une contre-réaction totale

$$e_2 = e_1 \frac{nAd}{1 + nAd} = K e_1$$

(e_1 étant la tension continue d'entrée).

Comme on a toujours $nAd \gg 1$, la caractéristique de transmission, K, est pratiquement égale à 1 et largement indépendante des variations de n et de A.

b. Solution mécanique a méthode de zéro automatique (*fig.* 3). — Dans ce dispositif, le signal alternatif de sortie de l'amplificateur actionne un moteur diphasé dans un sens ou dans l'autre selon le sens de la tension. Le moteur entraîne le curseur d'un potentiomètre qui règle la valeur d'une tension continue introduite en opposition avec la tension à mesurer. Le potentiomètre tourne ainsi jusqu'à ce que la tension d'opposition soit égale à la tension d'entrée, ce qui amène la disparition du signal et l'arrêt du moteur. La valeur de la tension d'opposition qui amène l'annulation du signal peut être mesurée avec toute la précision désirable aux bornes du potentiomètre au moyen d'un appareil de mesure ordinaire, ou indiquée mécaniquement par la position du curseur sur le potentiomètre calibré en tension.

Les deux méthodes donnent des résultats comparables au point de vue sensibilité et précision. Toutefois, la méthode électrique présente l'avantage d'une réponse plus rapide. La méthode mécanique est avantageuse lorsqu'on se propose l'enregistrement des phénomènes observés.

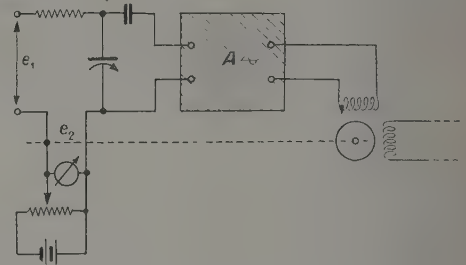


Fig. 3. — Système à méthode de zéro automatique.

Réalisation pratique. — Il convient d'obtenir, à partir de la faible tension continue à mesurer, un signal alternatif qui sorte suffisamment du bruit de fond.

Deux phénomènes contribuent à l'augmentation du bruit de fond, ce sont :

— *l'effet microphonique* (le condensateur vibrant étant par définition une source de vibrations mécaniques);

— *l'effet d'induction* (du fait du voisinage forcé des circuits les plus sensibles avec le dispositif électromagnétique d'entretien).

Ces effets qui seraient négligeables s'il s'agissait de convertir des tensions continues de l'ordre du volt, revêtent une grande importance lorsque le système doit être appliqué à la conversion de tensions inférieures au millivolt. Sans précautions spéciales, les tensions microphoniques et induites peuvent alors représenter 10 à 100 fois la grandeur du signal à amplifier.

Par ailleurs, le système ne devrait présenter aucun phénomène de dérive introduisant un signal parasite même en l'absence de tout signal d'entrée.

Ce signal parasite est dû à l'existence d'une différence de potentiel résiduelle — dite de contact — entre les armatures du condensateur vibrant, par suite de la différence de potentiel d'extraction de chaque armature. Bien que très réduite lorsque les armatures sont constituées d'un même métal, la différence de potentiel de contact résiduelle par

suite du défaut d'homogénéité du métal à l'échelle moléculaire, peut atteindre couramment plusieurs dizaines de millivolts.

Aussi pour avoir un signal alternatif nul lorsque la tension continue d'attaque est nulle, on est obligé d'introduire une faible tension continue en série dans le circuit d'entrée, et en opposition avec la différence de potentiel de contact afin de neutraliser celle-ci (*fig.* 4).

Cependant cette neutralisation ne se conserve pas dans le temps. En effet, la différence de potentiel de contact est sujette à des variations lentes, dues

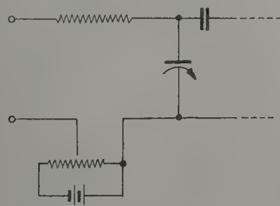


Fig. 4. — Neutralisation de la différence de potentiel de contact.

principalement à des phénomènes de surface (oxydations, adsorption, etc.) qui affectent différemment le potentiel d'extraction de chaque armature. Il convient donc de prendre des précautions spéciales.

Le problème de la réalisation pratique d'un condensateur vibrant porte donc sur trois points essentiels :

1° Obtention d'un rapport $\frac{\text{signal}}{\text{bruit de fond}}$ suffisant;

2° Obtention d'une différence de potentiel de contact stable entre les armatures;

3° Suppression des effets microphoniques et des effets d'induction.

L'étude de ces divers points a été entreprise de façon détaillée [4]; nous nous contenterons ici d'en résumer les résultats essentiels.

Étude du rapport $\frac{\text{signal}}{\text{bruit}}$. — Nous avons considéré le condensateur vibrant comme une source de tension alternative, de valeur :

$$v = E \times n$$

(n = rendement de conversion).

En fait, la tension v ainsi définie est celle qui apparaîtrait aux bornes d'un condensateur isolé, et que l'on pourrait appeler : « sa force électromotrice à vide ».

Mais le condensateur vibrant étant relié au circuit d'entrée d'un amplificateur, d'admittance non nulle, ce circuit constitue pour lui une certaine charge, de sorte que la tension réelle d'attaque de l'amplificateur — ou signal — est alors u, différence de potentiel aux bornes de l'impédance d'entrée, et non pas v, force électromotrice à vide, et cette tension u est une fonction de la valeur de l'impédance d'entrée de l'amplificateur. Ce n'est que pour une valeur suffisamment élevée de celle-ci, $\geqq 10^{10}\,\Omega$ par exemple, que l'on est en droit de considérer u comme pratiquement égale à v.

D'autre part, il est à noter que, par suite des imperfections mécaniques et des capacités parasites, le rendement de conversion, même à vide, d'un condensateur vibrant est toujours faible (généralement compris entre 1 et 10 pour 100), de sorte que v n'est déjà elle-même qu'une faible fraction de la tension continue appliquée, E.

Par ailleurs, la tension due au bruit thermique de la résistance d'entrée de l'amplificateur est proportionnelle à $\sqrt{R}$, et la tension due au bruit microphonique est proportionnelle à R.

Il apparaît donc deux exigences contradictoires : utilisation d'une résistance de fuite de grille de grande valeur pour augmenter le signal d'entrée, et diminution de cette résistance pour diminuer les bruits parasites.

On conçoit dès lors que le rapport $\frac{\text{signal}}{\text{bruit}}$ sera déterminé par les divers paramètres électriques et mécaniques du système (dimensionnement des armatures vibrantes, amplitude et fréquence de vibration, impédance d'entrée de l'amplificateur, etc.).

Calcul du rendement de conversion. — Soient :

a, distance entre les armatures au repos (exprimée en millimètres);

b, amplitude maximum de vibration de l'armature mobile de part et d'autre de la position de repos (exprimée en millimètres);

K, constante proportionnelle à la surface des armatures;

avec a et b en millimètres, on a

$$K = \frac{S}{4\pi}\,\frac{1}{9.10^{10}},$$

soit pratiquement : $K \approx 10^{-12}$ par centimètre carré d'armatures.

C_c, capacité de couplage à l'amplificateur;
ω, pulsation de la vibration;
E, tension continue appliquée;
u, amplitude maximum du signal alternatif obtenu sur la grille de la lampe.

La valeur instantanée de la capacité du condensateur vibrant est

$$C_{(t)} = \frac{K}{a + b\sin\omega t}. \qquad (1)$$

Dans le cas d'un condensateur vibrant isolé, si Q_m est la charge moyenne prise par celui-ci, la tension instantanée à ses bornes est

$$V_{(t)} = \frac{Q_m}{C_{(t)}} = \frac{Q_m}{K}(a + b \sin \omega t). \qquad (2)$$

La charge prise par le condensateur en état de vibration est telle que la valeur moyenne de la tension alternative qui en résulte soit égale à la tension continue appliquée, soit

$$V_m = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{Q_m}{K}(a + b \sin \omega t)\,dt = E. \qquad (3)$$

De cette condition on tire que la capacité moyenne effective du condensateur vibrant est

$$C_m = \frac{Q_m}{E} = \frac{K}{a}, \qquad (4)$$

d'où

$$Q_m = E C_m = E\frac{K}{a}$$

et la composante alternative résultante

$$V_{(t)} = E\frac{b}{a}\sin \omega t. \qquad (5)$$

L'étude mathématique du système réel, c'est-à-dire du condensateur vibrant couplé au circuit d'entrée de l'amplificateur, s'effectue en considérant que la charge fournie par la source se répartit entre le condensateur vibrant et le condensateur de couplage et que la variation de capacité du condensateur vibrant produit une variation périodique de cette répartition, d'où résulte une différence de potentiel alternative aux bornes de l'impédance d'entrée de l'amplificateur. La mise en équation du problème aboutit à une équation différentielle de la forme

$$\frac{dQ}{dt} + F_{1(t)}\,Q = F_{2(t)}$$

dans laquelle :

Q = charge déplacée dans l'impédance d'entrée Ze;

$$F_{1(t)} = \frac{C_v + C_c}{Z_e C_v C_c};$$

$$F_{2(t)} = \frac{Q_{m_1} C_c - Q_{m_2} C_v}{Z_e C_v C_c};$$

$$C_v = \frac{K}{a + b \sin \omega t};$$

$$Q_{m_1} = E\frac{K}{a};$$

$$Q_{m_2} = E C_c$$

et dont la solution donne comme résultat

$$u = E\frac{b}{a}\,\frac{K C_c Z_e \omega}{a}\,\frac{1}{\left(\frac{K C_c Z e \omega}{a}\right)^2 + \left(C_c + \frac{K}{a}\right)^2}. \qquad (6)$$

L'étude de cette fonction montre que la tension du signal, nulle pour une valeur nulle de l'impédance d'entrée, croît tout d'abord de façon linéaire en fonction de l'impédance d'entrée pour de faibles valeurs de celle-ci, et tend lorsque l'impédance d'entrée devient infinie, vers une valeur limite

$$u = E\frac{b}{a} = V.$$

Les courbes de la figure 5 représentent la façon dont varie l'amplitude du signal en fonction de la surface des armatures, de la fréquence de vibration, et de l'impédance d'entrée de l'amplificateur, pour un condensateur vibrant dont la distance entre armatures et l'amplitude de vibration ont été fixées une fois pour toutes, ainsi que la valeur du condensateur de couplage.

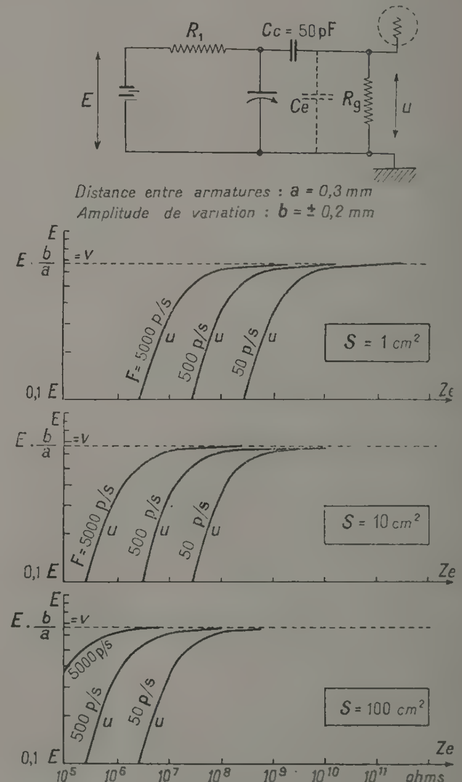


Fig. 5. — Caractéristiques réelles de fonctionnement d'un condensateur vibrant.

La valeur de la résistance R_1 n'a aucune influence sur la grandeur du signal (elle n'agit que sur la constante de temps de charge du système) pourvu que l'on donne à cette résistance une valeur telle que

$$R_1 C_m \geq \frac{2\pi}{\omega}.$$

Par ailleurs, la tension due au bruit thermique

de la résistance d'entrée est donnée par

$$e = \sqrt{1,6.10^{-20} R g \Delta F}$$

ΔF, bande passante de l'amplificateur.

Quant au bruit microphonique, celui-ci est dû principalement à la vibration des électrodes de la lampe et des connexions à haute impédance qui se comportent comme de petits condensateurs vibrants parasites. La capacité des connexions vibrantes étant très faible, ainsi que leur amplitude de vibration devant leur distance, on se trouve dans la région où la tension de bruit microphonique est fonction linéaire de l'impédance d'entrée. On peut voir ainsi que, dans les conditions existantes de fonctionnement, le bruit microphonique est proportionnel à l'impédance d'entrée *Ze*.

De cette étude se dégagent un certain nombre de conclusions que l'on peut résumer ainsi :

1. On voit que le signal obtenu est proportionnel au produit $Ze\, C_m\, \omega$. On pourra augmenter la capacité du condensateur vibrant ou la fréquence de vibration ce qui permettra de réduire dans un même rapport la valeur de la résistance d'entrée de l'amplificateur, donc les bruits parasites, sans réduire la valeur du signal.

2. La formule (6) donne la valeur maximum du signal possible à obtenir dans le cas idéal d'une réalisation mécanique parfaite où le parallélisme rigoureux des armatures est assuré et se maintient au cours de la vibration. Comme, en pratique, cette condition sera toujours loin d'être assurée, le signal obtenu sera très nettement inférieur aux valeurs données par la formule. La recherche de hautes performances conduit à la nécessité d'une très grande précision de réalisation mécanique.

Obtention d'une différence de potentiel de contact stable entre les armatures. — Nous avons vu précédemment que le système était affecté d'une certaine dérive, due aux modifications lentes du potentiel d'extraction des armatures du condensateur vibrant. La validité du système repose donc entièrement sur la possibilité d'assurer la stabilité de cette différence de potentiel de contact.

Les variations du potentiel de sortie des armatures sont dues principalement à des modifications de l'état de surface du métal, du fait de phénomènes d'oxydation, d'adsorption, de souillures, etc. Aussi pour obtenir une différence de potentiel de contact stable, les armatures doivent être constituées d'un métal inaltérable, et dont le potentiel de sortie soit peu sensible aux conditions atmosphériques. Deux métaux particulièrement recommandés à ce point de vue sont l'or pur et le rhodium. Comme seul importe l'état de surface, il suffit théoriquement de recouvrir un métal quelconque d'un dépôt d'or ou de rhodium de faible épaisseur ($\approx 10\,\mu$) pour obtenir une excellente stabilité de la différence de potentiel de contact. Toutefois, l'expérience des dépôts d'or ne nous a apporté que des résultats décevants : la différence de potentiel de contact résiduelle restant de l'ordre d'une trentaine de millivolts et la dérive de l'ordre de 1 mV par 24 h.

Par contre, nous avons obtenu de bons résultats avec des armatures en acier inoxydable. En utilisant des armatures en acier Inox 18/8, taillées dans la masse d'un même échantillon de métal, nous avons pu obtenir une différence de potentiel de contact résiduelle de l'ordre du millivolt, avec une dérive inférieure à 100 μ V par 24 h.

Les armatures doivent être maintenues parfaitement propres, la moindre trace de souillure pouvant faire apparaître des différences de potentiel de contact se chiffrant par dizaines de millivolts.

Pour obtenir les meilleurs résultats, il est recommandé de placer le condensateur vibrant dans une atmosphère de gaz inerte.

Réduction de la microphonie et de l'induction parasite. — L'utilisation d'un amplificateur sélectif à très faible bande passante permet de réduire considérablement le bruit de fond, mais les tensions parasites périodiques de même fréquence que le signal passent sans affaiblissement, de sorte que la tension alternative soumise à l'amplification est en fait la somme du signal et de ces tensions parasites. On aura ainsi un faux zéro dont la stabilité reposera dès lors sur celle des tensions parasites. Or la stabilité de celles-ci n'est nullement assurée, en particulier en ce qui concerne le bruit microphonique dont l'amplitude et la forme se modifient fréquemment et spontanément au cours du temps. Il pourra donc en résulter un effet de dérive du zéro nullement dû à une variation de la différence de potentiel de contact.

De ces considérations il résulte que pour réaliser un appareil stable il ne suffit pas d'assurer la stabilité de la différence de potentiel de contact entre les armatures du condensateur vibrant, il faut aussi que toutes les tensions parasites périodiques de même fréquence que le signal soient réduites auparavant à un niveau inférieur au seuil de sensibilité du système, les tensions parasites dangereuses étant celles créées par induction et par microphonie.

L'effet microphonique et l'effet d'induction peuvent être réduits à un faible niveau par l'observation des précautions suivantes :

— Montage du condensateur vibrant sur un bâti massif;

— Montage antimicrophonique de la lampe d'entrée et de sa résistance de grille;

— Immobilisation de toutes les connexions susceptibles de vibrer;

— Utilisation pour constituer les isolateurs de

matériaux ne présentant aucun effet piézoélectrique appréciable (téflon, polystyrène);

— Blindage magnétique du dispositif d'entretien;

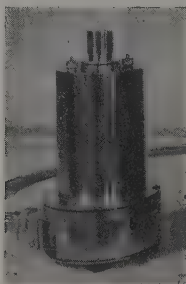
— Filtrage rigoureux de la tension continue de contre-réaction.

L'atténuation des effets microphoniques et des effets d'induction serait facilement obtenue si le courant d'alimentation de la bobine d'entretien et les vibrations mécaniques étaient d'une fréquence différente de celle du signal produit.

En ce qui concerne l'effet d'induction, il est facile de faire en sorte que la vibration se produise à une fréquence double de celle du champ d'excitation. Les tensions induites se produisent ainsi à une fréquence inférieure de moitié à celle du signal et se trouvent automatiquement éliminées par un amplificateur sélectif.

Par contre, on constate que les dispositions permettant d'obtenir un signal à une fréquence différente de celle de la vibration entraînent une réduction considérable du rendement de conversion et doivent être rejetées de sorte que le bruit microphonique demeure le phénomène parasite dont il est le plus difficile de se débarrasser.

Description de l'électromètre à condensateur vibrant construit au C. E. A. — Le système que nous présentons ici (*fig.* 6) utilise la méthode électrique à contre-réaction de tension continue. Il forme un ensemble réalisé en deux parties : un châssis amplificateur, et le condensateur vibrant proprement dit, celui-ci pouvant être relié à l'amplificateur au moyen d'un câble de longueur quelconque.



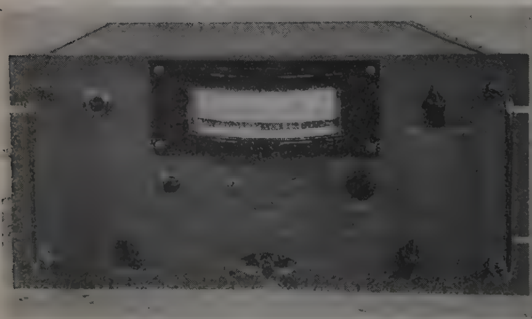


Fig. 6. — Photographie de l'ensemble.

Le châssis amplificateur contient l'alimentation générale du système, l'amplificateur, et porte un panneau de contrôle comportant l'appareil de mesure indicateur ainsi que les divers contrôles et réglages.

Le condensateur vibrant est monté dans un boîtier étanche et associé à une lampe préamplificatrice montée en cathode-follower permettant de relier le condensateur vibrant à l'amplificateur par une ligne à basse impédance.

A. Description mécanique. — Le condensateur vibrant (*fig.* 7) est constitué par une palette vibrante 1 en forme de papillon dont une partie constitue l'armature mobile du condensateur et l'autre l'armature de l'électroaimant d'excitation. Cette palette est fixée en son milieu par un axe transversal qui travaille à la torsion et assure en même temps la connexion à la masse de la pièce. Cette forme de système vibrant a été adoptée dans le but de séparer nettement la partie électrostatique de la partie électromagnétique afin d'éviter la création de tensions induites dans le retour de masse de l'armature mobile du condensateur et de permettre la réalisation d'un blindage magnétique efficace de la bobine d'excitation. La palette vibrante est portée par une pièce de bakélite 2 fixée elle-même contre une cloison de séparation en fer doux 3 comportant une fente par laquelle passe l'aile de la palette vibrante servant d'armature d'excitation. L'électroaimant d'excitation 4 est porté par une console de laiton fixée de l'autre côté de la cloison. L'ensemble est recouvert d'un carter en anhyster 5 venant s'appliquer sur la cloison de fer doux et formant ainsi blindage magnétique.

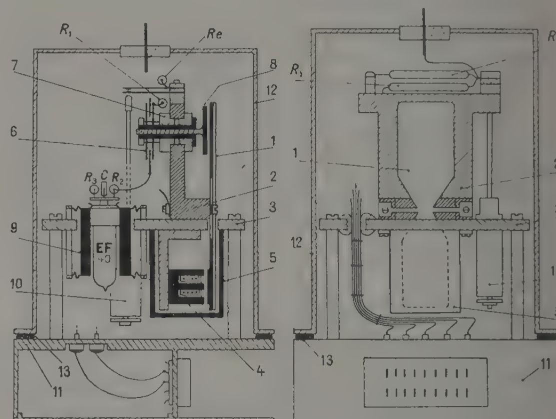


Fig. 7. — Conception mécanique du condensateur vibrant.

La pièce de bakélite sur laquelle la palette vibrante est fixée par son axe transversal porte également

l'armature fixe du condensateur vibrant et le condensateur de couplage à la lampe d'entrée. Ce condensateur 6 devant présenter un très haut isolement est un condensateur fixe à air, monté sur la pièce de bakélite par l'intermédiaire d'isolateurs additionnels en polystyrène 7. L'armature fixe du condensateur vibrant 8 est constituée par un disque porté par une tige filetée centrale qui se visse dans l'axe du condensateur de couplage et permet le réglage de la distance de cette armature à la palette vibrante. La palette vibrante et l'armature fixe sont en acier Inox 18/8, et taillées dans la masse d'un même échantillon de métal afin d'obtenir une différence de potentiel de contact aussi faible que possible. L'acier Inox n'étant pas magnétique, une pastille de fer doux a été rapportée sur la palette vibrante face à l'électroaimant. Une remarque est à faire au sujet de la pièce 2 en bakélite : si cette pièce était métallique, elle introduirait une capacité parasite notable vis-à-vis des armatures isolées qu'elle porte; si elle était constituée d'une matière hautement isolante, elle risquerait d'acquérir des charges parasites. Le choix de la bakélite, isolant médiocre, pour constituer cette pièce, permet d'éviter simultanément ces deux inconvénients.

La lampe préamplificatrice est montée dans un cylindre de plomb 9 passant dans un trou de grand diamètre pratiqué dans la cloison de fer, et maintenu flottant par une monture élastique en caoutchouc, cette disposition constituant un montage antimicrophonique très efficace. La résistance de grille de cette lampe est également montée sur ce bloc flottant, l'expérience nous ayant montré la nécessité d'éviter la vibration de cette résistance.

Un relais électromagnétique 10 actionné à partir du panneau de contrôle de l'amplificateur permet de court-circuiter les bornes d'entrées afin d'effectuer le réglage de zéro du système.

Un socle de base 11 porte les bornes relais des connexions électriques.

Un carter 12 recouvrant l'ensemble se boulonne sur le socle de base avec interposition d'un joint de caoutchouc 13 afin de constituer une enceinte étanche.

B. Description électrique (*fig.* 8). — Pour

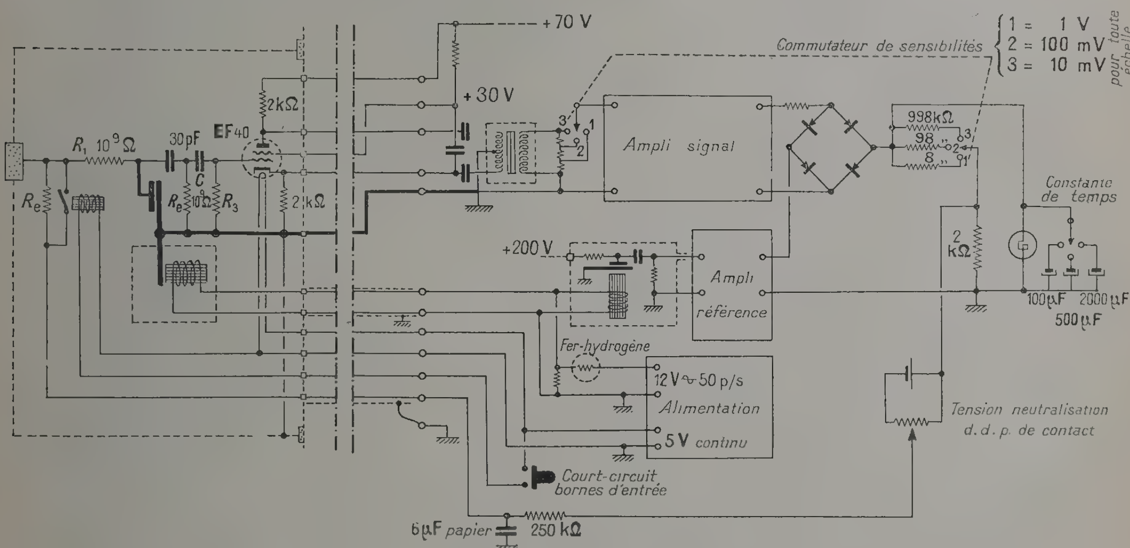


Fig. 8. — Schéma électrique général.

éviter les risques de perturbation par le secteur, la fréquence du signal a été choisie de 100 p/s et un amplificateur sélectif ne laisse passer qu'une bande de 90 à 110 p/s. Cette fréquence est obtenue très facilement à partir du secteur en utilisant un simple électroaimant non polarisé pour exciter la palette vibrante : la vibration se produit ainsi à une fréquence double de celle du secteur. De plus, nous avons prévu la transmission du signal par une ligne symétrique et une attaque en push-pull de l'amplificateur afin que les tensions parasites éventuellement collectées par le câble de liaison se détruisent mutuellement dans le transformateur d'entrée. A cet effet une résistance de faible valeur égale à la résistance de cathode a été ajoutée dans le circuit-plaque de la lampe préamplificatrice montée en cathode-follower; cela ne compromet pratiquement pas les avantages du montage en cathode-follower et l'on dispose ainsi de deux tensions décalées de 180° pour attaquer en push-pull le transformateur d'entrée.

Comme la fréquence du signal se trouve égale à

la fréquence d'ondulation de la tension continue d'alimentation redressée à deux alternances, il est effectué un filtrage très poussé des diverses tensions d'alimentation. De plus, le chauffage de la lampe préamplificatrice est effectué en courant continu parfaitement filtré, cette précaution est indispensable pour éviter l'introduction d'une importante tension parasite par la capacité grille-filament. Pour que le condensateur vibrant ne reçoive pas de charges indésirables par le courant grille de cette lampe, une double cellule RC est utilisée pour le coupler à la lampe. De plus, le courant grille de cette lampe est diminué par la réduction des tensions d'électrodes : dans ces conditions, le courant grille résiduel est inférieur à 10^{-10} A. L'alimentation qui fournit le courant continu de chauffage de la préamplificatrice sert également à alimenter le relais de court-circuit des bornes d'entrées.

Enfin, une précaution qui s'est avérée nécessaire pour éviter l'introduction de tensions parasites a été d'isoler des masses locales le retour de masse du condensateur vibrant et son carter de protection formant blindage électrostatique. L'ensemble de ces précautions a permis de réduire à une valeur de l'ordre du microvolt le niveau, rapporté à l'entrée, des perturbations apportées par le secteur.

Le signal alternatif fourni par le condensateur vibrant reçoit une amplification d'environ 10^6 au moyen de l'amplificateur sélectif. Afin de pouvoir appliquer le principe de la contre-réaction de tension continue, il est nécessaire d'effectuer le redressement de la tension de sortie au moyen d'un détecteur discriminateur de phase, ce qui nécessite la disposition d'une tension de référence de même fréquence que le signal. Pour produire cette tension de référence, on utilise un second condensateur vibrant, dit « condensateur vibrant de référence » qui, tout comme le condensateur vibrant principal, est excité par un électroaimant non polarisé alimenté par le secteur et produit ainsi une vibration à une fréquence double. Ce second condensateur vibrant chargé de produire une tension alternative à partir de la tension continue de 200 V est d'une construction extrêmement rudimentaire et ne nécessite aucune précaution contre l'induction parasite et la microphonie, ce qui en fait une pièce peu coûteuse et d'un fonctionnement sûr. La tension alternative fournie par ce condensateur vibrant est amplifiée et appliquée au discriminateur de phase comme tension de référence. Un étage déphaseur intercalé dans l'amplificateur permet d'effectuer la mise en phase du signal et de la tension de référence.

La tension alternative alimentant les bobines d'excitation des deux condensateurs vibrants est stabilisée au moyen d'une régulatrice fer-hydrogène afin d'obtenir une amplitude de vibration à peu près constante. La tension continue destinée au condensateur vibrant de référence ainsi qu'aux premiers étages amplificateurs est stabilisée au moyen d'un simple tube à gaz. Les divers transformateurs et selfs de filtrage sont pourvus de sérieux blindages magnétiques.

L'appareil est prévu pour trois sensibilités : 10 mV, 100 mV et 1 V pour toute l'échelle, les diverses sensibilités étant obtenues en agissant simultanément sur le fractionnement de la tension de contre-réaction et sur la sensibilité de l'amplificateur.

Sur l'échelle 10 mV d'importantes fluctuations dues au bruit de fond peuvent se superposer à la tension continue qu'il s'agit de mesurer. Pour obtenir une indication plus stable de l'appareil de mesure et faciliter ainsi sa lecture, le cadre mobile de celui-ci est shunté par une forte capacité dont on peut faire varier la valeur, afin d'obtenir plusieurs constantes de temps d'intégration des fluctuations, selon les besoins.

Une pile fournit la tension de compensation de la différence de potentiel de contact entre les armatures du condensateur vibrant, celle-ci pouvant être ajustée en valeur et en sens au moyen de réglages situés sur le panneau de contrôle de l'amplificateur, conjointement avec un bouton poussoir qui permet d'actionner à distance le relais de court-circuit aux bornes d'entrée.

Performances. — SENSIBILITÉ. — Cet appareil possède une sensibilité permettant d'apprécier une tension continue de 100 μV aux bornes d'une résistance pouvant atteindre $10^{12}\,\Omega$, ce qui permet de déceler en lecture directe un courant de 10^{-16} A. La figure 9 montre la réponse de l'appareil à des

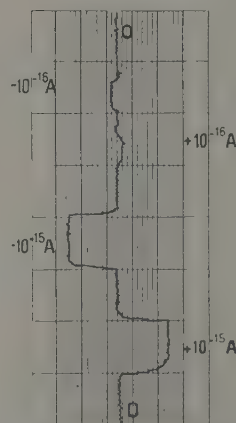


Fig. 9. — Performances en sensibilité.

variations de courant de $\pm 10^{-15}$ ± et $\pm 10^{-16}$ A, l'équivalence de ces courants étant fournie par une source de tension ayant une résistance interne de $10^{12}\,\Omega$.

Des courants beaucoup plus faibles peuvent être

mis en évidence en remplaçant la résistance d'entrée par une capacité étalonnée et en mesurant le taux de montée de la tension aux bornes. La capacité effective d'entrée du condensateur vibrant se trouvant réduite à une fraction de micro-microfarad par suite de l'action de la contre-réaction de tension continue, il est possible d'utiliser une capacité étalon ne dépassant pas 10 $\mu\mu$F, de sorte que, d'après la formule

$$V = \frac{i}{C} t,$$

un courant de 10^{-18} A donnerait lieu à une montée de tension de presque toute l'échelle 10 mV en 24 h, variation facile à distinguer de la dérive propre de l'appareil.

STABILITÉ. — Au point de vue stabilité, des enregistrements effectués à diverses époques ont montré des dérives allant de 0,1 à 0,5 mV par 24 h. Occasionnellement, nous avons pu enregistrer des dérives quotidiennes inférieures à 100 μ V, mais ceci doit être considéré comme une performance exceptionnelle.

Nous donnons (*fig.* 10) un exemple d'enregistrement portant sur une journée de fonctionnement, la sensibilité utilisée étant de 10 mV pour toute l'échelle. On peut voir que dans ce cas, la dérive a été d'environ 0,3 mV pour les 24 h.

Cet enregistrement a été effectué sans tension extérieure d'attaque et tous les réglages de compensation de la différence de potentiel de contact à zéro. Par conséquent, la tension indiquée par l'appareil n'est autre que la différence de potentiel de contact résiduelle entre les armatures du condensateur vibrant, soit ici environ 2,5 mV.

TEMPS DE RÉPONSE. — La capacité du condensateur vibrant étant d'environ 50 $\mu\mu$F, la constante de temps du circuit d'entrée équipé d'une résistance étalon de $10^{12}\,\Omega$ serait normalement de l'ordre de 1 mn; mais la contre-réaction de tension continue, en réduisant la capacité effective d'entrée, entraîne une réduction correspondante de la constante de temps de réponse du système, de sorte que celle-ci se trouve en définitive inférieure à 1 s.

Cette rapidité relative de réponse peut être un inconvénient pour la mesure des courants très faibles, les fluctuations importantes du bruit de fond ne se trouvant pas atténuées. Aussi pour faciliter les mesures dans ce cas, la constante de temps de l'appareil de mesure peut être systématiquement augmentée au moyen d'un commutateur spécial. On peut ainsi obtenir à volonté un temps de réponse plus ou moins long, la limite inférieure étant de l'ordre de la seconde.

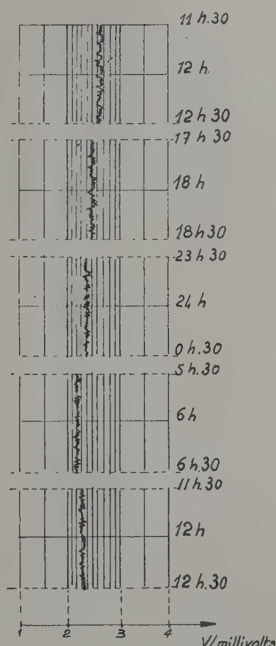


Fig. 10. — Performances en stabilité.

Manuscrit reçu le 4 août 1954.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] PALEVSKY, SWANK et GRENCHIK. — Design of Dynamic Condenser Electrometer. *Rev. Sc. Instr.*, 1947, **18**, 298.

[2] REESE H. — Design of Vibrating Capacitor Electrometer. *Nucleonics*, 1950, **6**, 3.

[3] THOMAS D. G. A. et FINCH H. W. — A Simple Vibrating Condense Electrometer. *Electr. Eng.*, 1950, **22**, 271.

[4] BRIÈRE M. — L'électromètre à condensateur vibrant. Thèse présentée en 1952 devant le Conservatoire des Arts et Métiers.

MESURE PAR ULTRASONS DES CONSTANTES ÉLASTIQUES DES SOLIDES

Par Guy MAYER et Jean GIGON,
C. E. A., Service de Chimie physique.

Sommaire. — L'existence d'un nouveau procédé d'émission d'ondes acoustiques dans les gaz donne un nouveau moyen de mesurer le module d'Young, le module de Poisson et le frottement interne des solides.

Un appareil inventé et construit par S. Klein [1] et baptisé ionophone permet d'obtenir des ondes acoustiques de fréquence continûment variable.

Voici une description très sommaire de ce dispositif :

Un oscillateur accordé sur 27 MHz (cette fréquence ne correspond pas à un optimum de rendement, mais à un minimum de perturbation dans les postes de T. S. F. et de télévision voisins) est utilisé à produire un champ électrique intense à l'extrémité d'un fil de platine chauffé au blanc; ce chauffage est obtenu par induction à l'aide de ce même champ de haute fréquence; le champ ionise fortement le gaz entourant l'extrémité du fil et le rend lumineux.

Quand on module en amplitude à une fréquence donnée le champ appliqué à l'extrémité du fil (en agissant sur l'oscillateur), la zone de gaz ionisé l'entourant se comporte comme une source d'ondes acoustiques de même fréquence.

Nos expériences nous ont appris qu'on peut ainsi produire dans l'air à la pression normale des ondes acoustiques jusqu'à la fréquence de 1 MHz. A la fréquence de 50 MHz, ce générateur fonctionne dans l'air et dans l'azote dans le domaine de pressions allant de $1/10^2$ d'atmosphère à 5 atm. Ces chiffres ne sont pas limitatifs.

A 50 kHz, à 5 cm de la source d'ultrasons, on peut obtenir des amplitudes de pression de 100 baryes autour de la pression atmosphérique normale, ce qui correspond à une intensité de 120 ergs/cm^2/s.

Mesure du module de Young. — On suspend, horizontalement dans le champ d'ultrasons un cylindre du matériau à étudier à l'aide de deux fils fins qui le supportent près des points nodaux relatifs au mode de vibration longitudinale que l'on veut exciter; puis on fait varier la fréquence des ondes acoustiques jusqu'à ce que le barreau entre en résonance (*fig.* 1).

Un moyen simple de détecter cette résonance consiste à utiliser l'effet « microphonique » qui fait fonctionner nos téléphones. Une pointe de graphite ou de germanium appuie légèrement sur une face du barreau cylindrique; un circuit est ainsi constitué comportant, en série, une pile, le primaire d'un transformateur, la pointe, le barreau et un fil de suspension. Si le barreau étudié est de nature isolante, on en métallise au préalable une face, ce qui n'altère sa fréquence de résonance, en valeur relative, que d'une fraction égale au quotient de la masse de la métallisation par la masse totale du barreau.

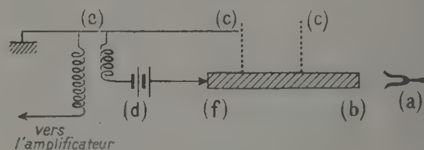


Fig. 1. — (*a*) source d'ultrasons; (*b*) barreau; (*c*) fils de suspension; (*d*) pile 1,5 V; (*e*) transformateur; (*f*) pointe microphonique.

Dans tous les cas, quand le barreau entre en résonance, un signal sinusoïdal de même fréquence est produit dans le secondaire du transformateur et l'on se trouve ramené au problème classique de mesurer la fréquence correspondant à un maximum de courant dans un circuit.

Si f est cette fréquence, le module de Young est donné dans le cas d'un barreau infiniment long et mince par la formule

$$E = 4\rho \frac{l^2 f^2}{n^2}, \qquad (1)$$

ρ, densité;

l, longueur;
n, nombre entier, indique le numéro d'ordre de l'harmonique sur lequel on fait vibrer le barreau.

Le barreau et le détecteur peuvent être placés dans un four à l'ouverture duquel on place la source d'ondes qui fonctionne à toute température. L'effet microphonique permet la détection des résonances jusqu'à 600°. Le four peut être balayé d'un gaz inerte comme l'azote dans lequel le générateur fonctionne aussi bien. On a ainsi un dispositif commode pour étudier la variation du module de Young avec la température.

Mesure du module de Poisson. — Si le rayon du barreau n'est plus infiniment petit devant sa longueur, la formule (1) n'est plus exacte. En effet, si le module de Poisson est différent de zéro, au mouvement longitudinal des molécules se superpose un mouvement radial qui contribue à l'énergie cinétique de la vibration. Rayleigh [3] trouve

$$f_n = f_0^{(n)}\left(1 - \frac{n^2\pi^2\mu^2 r^2}{4 l^2}\right),$$

f_n, fréquence réelle de résonance sur l'harmonique d'ordre n;
$f_0^{(n)}$, fréquence théorique pour un barreau de même longueur, très mince;
μ, module de Poisson;
r, rayon;
l, longueur.

Pour la fréquence fondamentale d'un barreau d'aluminium de longueur 6 cm et de diamètre 1,5 cm le terme correctif vaut environ $\frac{6,6}{1\,000}$.

En faisant confiance à la formule de Rayleigh, on peut obtenir le module de Poisson en comparant la fréquence de résonance de l'harmonique 2 au double de la fréquence fondamentale.

En effet

$$f_1 = f_0^{(1)}\left(1 - \frac{\pi^2\mu^2 r^2}{4 l^2}\right),$$

$$f_2 = 2 f_0^{(1)}\left(1 - \frac{\pi^2\mu^2 r^2}{l^2}\right),$$

$$2 f_1 - f_2 = 2 f_0^{(1)} \frac{3\pi^2\mu^2 r^2}{4 l^2}.$$

Cette formule donne des résultats cohérents pour des échantillons tels que $\frac{r}{l} \leq \frac{1}{10}$.

Nous avons trouvé ainsi, dans des échantillons de métaux étirés et purs à 99,5 % pour du nickel $\mu = 0,315$, pour du cuivre $\mu = 0,394$ et pour de l'aluminium $\mu = 0,351$.

Question du frottement interne. — La méthode d'excitation décrite ici permet d'employer une suspension peu rigide, introduisant peu d'amortissement. Mais la présence d'air étant indispensable, on ne pourra ainsi étudier que le frottement interne de solides dont l'amortissement interne est relativement grand. Pour des cylindres ayant des faces d'environ 1,2 cm², l'amortissement dû au contact de la pointe microphonique est négligeable devant celui de l'air; de même celui de la suspension.

Les calculs qui suivent sont approchés et ne prétendent indiquer que des ordres de grandeur.

A. *Amortissement dû à l'air.* — Sur la face excitée par les ultrasons, les phénomènes d'amortissement sont complexes [4], mais on peut admettre que l'autre face rayonne comme un piston plat. Elle subit alors une force de « frottement » proportionnelle à sa vitesse :

$$F = -\rho c S \frac{d\xi}{dt},$$

ρ, densité de l'air;
c, vitesse du son dans l'air;
S, surface.

Le champ d'ondes acoustiques est caractérisé par les variations de pression dans un même plan d'onde

$$P = P_0 \sin \omega t.$$

L'équation du mouvement de notre barreau est de la forme ([4], p. 153)

$$\mu \frac{d^2\xi}{dt^2} + (\rho c S)\frac{d\xi}{dt} + k\xi = P_0 S \sin \omega t,$$

μ vaut la moitié de la masse du barreau et ξ est le déplacement d'une face. Appelons ξ_0 l'élongation qu'une force statique $P_0 S$ donnerait au barreau et ξ_{max} l'élongation à la résonance qui a lieu pour une valeur de $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$,

$$\xi_{max} = \frac{\mu\omega_0}{2\rho c S}\xi_0,$$

ξ_0 ne dépend que de la longueur du barreau et le produit $\frac{\mu\omega_0}{S}$ ne dépend que de sa nature.

Le rapport $\frac{\xi_{max}}{\xi_0}$ est souvent appelé coefficient d'amplification et désigné par la lettre Q.

Si $\Delta\nu$ est l'intervalle de fréquence, entourant la fréquence propre, $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$, dans lequel

$$\xi \geq \xi_{max}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

On peut montrer que $Q = \frac{2\nu_0}{\Delta\nu}$, relation qui se prête à la mesure.

Pour des cylindres de quartz, Q est de l'ordre de 30 000 dans l'air à la pression normale; nos mesures nous ont donné 35 000.

B. *Amortissement interne.* — Ceci nous indique donc que notre dispositif ne nous permettra de mesurer le frottement interne que dans les corps vibrant mal avec un coefficient Q inférieur à 3 000 (cas du cuivre, du graphite). Beaucoup d'auteurs soutiennent d'ailleurs que les forces de frottement dans les solides ne dépendent pas que des vitesses d'élongation, mais aussi des amplitudes [6].

Étalonnage de la source et du détecteur. — Des expériences sur des barreaux de quartz dont la grande dimension est parallèle à l'axe électrique nous ont permis de mesurer la largeur de la bande de résonance en détectant soit par effet piézoélectrique, soit par effet microphonique. La largeur mesurée dans les deux cas est la même, ce qui indique que l'amortissement dû au contact de la pointe est négligeable.

La constante piézoélectrique du quartz étant connue, et son coefficient d'amplification étant ainsi mesuré, on a un moyen de mesurer, d'une part, l'intensité des ultrasons et, d'autre part, la sensibilité du détecteur microphonique.

Sans prendre de précautions particulières contre les bruits, les vibrations du support et les parasites électriques (ces derniers agissent peu car l'impédance du circuit détecteur est faible), on détecte « microphoniquement » des élongations de l'ordre de 1 Å, avec un amplificateur non accordé.

Pour un barreau de quartz de 4,5 cm, on obtient à la résonance des élongations de l'ordre de 1 Å en l'excitant avec une onde acoustique où les amplitudes de pression dans l'air sont de l'ordre de 0,06 barye.

Pour obtenir la même élongation en excitant piézoélectriquement, il faudrait appliquer une tension sinusoïdale de même fréquence égale à 1,6 mV. Si l'on détecte piézoélectriquement la vibration excitée par les ultrasons, on recueille une tension sinusoïdale de 0,5 V.

En excitant par attraction électrostatique une face d'un barreau formant un condensateur avec une autre électrode distante de 0,5 mm [2], [5], il faudrait appliquer une différence de potentiel alternative de 20 V environ pour obtenir le même état de vibration.

Il peut paraître surprenant qu'il soit question ici de distances plus petites que celles qui séparent deux atomes, mais des élongations de 1 Å sont encore bien supérieures à celles qui se produisent spontanément du fait de l'agitation thermique. En effet, écrivons que l'énergie potentielle moyenne d'agitation thermique vaut $\frac{1}{2}kT$ (règle d'Einstein)

$$F = \frac{SE}{l}\Delta l$$

(S, surface; l, longueur; E, module de Young).

Pour allonger de Δl le barreau, il faut

$$W = \int_0^{\Delta l} F\,d\Delta l = \frac{SE}{l}\,\frac{\Delta l^2}{2}.$$

Le $\overline{\Delta l_0^2}$ d'agitation thermique sera donné par l'équation

$$\frac{1}{2}kT = \frac{1}{2}\,\frac{SE}{l}\,\overline{\Delta l_0^2}; \qquad \frac{\Delta l_0^2}{l^2} = \frac{kT}{vE},$$

v étant le volume.

Pour un barreau de quartz de longueur 45 mm et de diamètre 14 mm à 300° K,

$$\sqrt{\overline{\Delta l_0^2}} \sim 4.10^{-13}\ \text{cm} \quad \text{soit } 1/25\,000\ \text{Å}.$$

Diverses applications de cette méthode feront l'objet de publications séparées.

Manuscrit reçu le 23 mars 1955.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Klein S. — *C. R. Acad. Sc.*, 1951, **233**, 143.
[2] Jacobs et Dennison-Bancroft, *Phys. Rev.*, 1938, **1**, 687.
[3] Rayleigh. — Theory of Sound. Dover Publication, New York, 1945, p. 115.
[4] Rocard Y. — Dynamique générale des vibrations, Masson, Paris, 1949, p. 330.
[5] Bordoni et Nuovo, *Ricerca Sc.*, 1954, Anno **24**, n° 3, 560.
[6] Zener C. — *Phys. Rev.*, 1937, **51**, 230.

COMPTEUR PROPORTIONNEL A COQUE DE Be POUR LA DÉTECTION DE NEUTRONS RAPIDES

Par Yves KŒCHLIN,

Service des Constructions électriques, Centre d'Études nucléaires de Saclay.

Sommaire. — On décrit la réalisation d'un compteur Geiger-Müller destiné à la détection des neutrons cosmiques.

L'étude de ses caractéristiques et les mesures effectuées montrent qu'en régime proportionnel, ce compteur permet de discriminer les neutrons rapides de rayonnements γ et cosmiques. Son rendement quantique est de l'ordre de 8.10^{-5} pour des neutrons de 50 MeV environ.

Principe. — Le principe consiste à détecter l'ionisation provoquée dans le gaz d'un compteur proportionnel par un noyau de la coque lorsque ce noyau est projeté par un neutron rapide à l'intérieur du compteur.

Le noyau de l'élément constituant la coque, doit satisfaire à trois conditions principales :

1° Il doit être léger pour capter une grande part de l'énergie du neutron incident, et avoir ainsi une plus grande chance de sortie de la coque.

2° Son ionisation doit être supérieure à celle des autres particules chargées, susceptibles de pénétrer dans le gaz du compteur, ceci afin de pouvoir le distinguer de ces dernières.

3° Sa section efficace totale doit être négligeable pour les rayonnements autres que les neutrons rapides.

Le tableau I groupe les constantes physiques relatives à quelques éléments susceptibles de constituer la coque du compteur. Nous n'avons pas fait figurer Li ni B à cause de la grande section efficace qu'ils présentent aux neutrons lents.

Les sections efficaces de diffusion σ sont tirées du Neutron Cross Section A.E.C.U.-2040. Les parcours R dans la coque sont calculés, par comparaison avec ceux des protons dans l'air, à l'aide des formules approchées qui relient les grandeurs de deux particules chargées de même vitesse V et ne dissipant leur énergie E que par ionisation [1]. Ce sont

$$\frac{R_1 Z_1^2}{M_1} = \frac{R_2 Z_2^2}{M_2}; \qquad \frac{K_1}{Z_1^2} = \frac{K_2}{Z_2^2}; \qquad \frac{E_1}{M_1} = \frac{E_2}{M_2}$$

dans lesquelles R représente le parcours, K l'ionisation spécifique, Z et M la charge et la masse des particules à la vitesse V.

TABLEAU I.

Constantes physiques relatives à H, Be *et* C.

1.	2.			3.			4.			5.			6.		
E_n.	E_{H}.	E_{Be}.	E_{C}.	σ_{H}.	σ_{Be}.	σ_{C}.	R_{H}.	R_{Be}.	R_{C}.	P_{H}.	P_{Be}.	P_{C}.	K_{H}.	K_{Be}.	K_{C}.
5.......	5	1,8	1,4	1,7	1,7	2,1	49	0,17	0,06	6	0,5	0,15	12,5	5 300	20 600
50.......	50	18	14	0,1	1	1,3	2 500	4,5	1,1	22	8	2	1,25	530	2 060
100.......	100	36	28	0,05	0,8	1,3	8 400	16	3,7	31	22	6	0,1	265	1 030

Colonne 1. — Énergie des neutrons incidents (en MeV).
» 2. — Énergie des noyaux projetés dans un choc central par les neutrons incidents d'énergie E_n (en MeV).
» 3. — Section efficace de diffusion (en barns).
» 4. — Parcours dans la coque des noyaux d'énergie E (en mg/cm²).
» 5. — Probabilité pour que le neutron d'énergie E_n soit détecté ($\times 10^{-5}$).
» 6. — Coefficient d'ionisation dans l'air à 5 mm Hg de pression (pair ions/cm).

Le produit $P = \frac{1}{4} \sigma n R$, où n est le nombre d'atomes par centimètre cube de l'élément considéré dans la coque, représente la probabilité pour qu'un neutron y provoque l'extraction d'un noyau : c'est la probabilité pour qu'il soit détecté ou encore le rendement quantique du compteur.

Les coefficients d'ionisation K sont calculés par comparaison avec celui de la particule α du Po dans l'air (1) à l'aide des relations déjà citées.

On voit d'après le tableau I que le Be est un élément qui peut être choisi avec avantage. Son coefficient d'ionisation est en effet de beaucoup supérieur à celui d'un proton et en outre le rendement quantique d'un compteur à coque de Be, vis-à-vis de neutrons de 50 MeV, est de l'ordre de 10^{-4}; c'est-à-dire qu'il représente encore les 2/5 du rendement d'un compteur à coque de polystyrolène de même épaisseur massique.

Réalisation. — Nous avons construit un compteur proportionnel à vapeur pure dont la légende de la figure 1 donne les caractéristiques.

Il a été réalisé en outre un compteur témoin,

(1) On a admis que le pouvoir de ralentissement des éléments considérés sont du même ordre que celui de l'air (t.p.n.).

semblable au premier, mais dont la coque en laiton le rend insensible aux neutrons rapides. En effet le calcul montre que le rendement quantique de ce

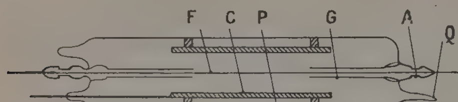


Fig. 1. — Schéma du compteur.

F. Fil : acier inoxydable; diamètre, 0,2 mm; C. Coque : longueur, 12 cm; diamètre, 30 mm; épaisseur, 2 mm ; P. Paroi en verre moly ; G. Tube de garde en verre moly ; A. Anneau de garde ; Q. Queuzot.

Nature de la coque : beryllium fritté. Le gaz de remplissage est de l'alcool éthylique pur sous une pression de 5 mm de Hg. La longueur utile du fil est de 10 cm.

compteur n'est que 1/400 du rendement du compteur à coque de Be, pour des neutrons de 50 MeV.

Mesures. — Les deux compteurs étaient alimentés sous 700 V, et pour cette valeur leur fonctionnement en régime proportionnel était satisfaisant.

Le taux de comptage des impulsions délivrées par les compteurs, lors de nos mesures, étant extrêmement faible, nous avons utilisé l'appareillage de mesure très simple indiqué sur la figure 2.

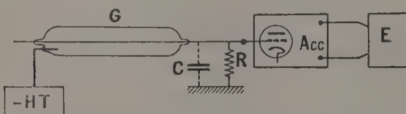


Fig. 2. — Dispositif de mesure.

Le compteur G, alimenté par la haute tension négative H.T., délivre pour chaque impulsion une charge q dans le condensateur c de l'anode. A celle-ci est connectée la grille d'entrée d'un amplificateur à courant continu C. E. A. Il y apparaît un potentiel $V = \frac{q}{c}$, la constante de temps rc étant très grande devant le temps de collection de la charge q. Ce potentiel est reproduit sur un enregistreur E à un facteur constant près.

$C = 20$ pF; $R = 10^{10}$ Ω;

Sensibilité de l'appareillage : 0,7 V/cm;
Déroulement du papier : 1 cm en 2,5 mn.

Comme dans ce dernier l'élongation du déplacement de l'aiguille de l'enregistreur est proportionnelle à l'amplitude de l'impulsion qui lui a donné naissance, il est possible de tracer les courbes de sélection des impulsions délivrées par les compteurs.

La figure 3 représente de telles courbes, relatives à l'irradiation des compteurs à coque de Be et de laiton pour les neutrons du Po-Be et les photons γ du Ra C.

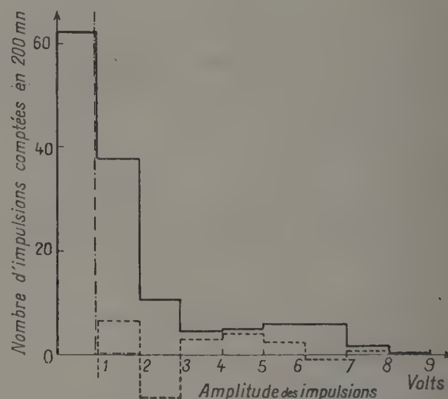


Fig. 3. — Spectre des impulsions des compteurs soumis à un flux de neutrons rapides.

——— Courbe 1 : Compteur à coque de Be, irradié par une source de Po-Be.

- - - - - » 2 : Compteur à coque de laiton, irradié par une source de Po-Be.

—.—.—. » 3 : Compteur à coque de Be, irradié par une source de Ra de 350 μC.

Nota. — Le mouvement propre des compteurs a été déduit.

La courbe 1 correspond à l'irradiation du compteur à coque de Be par la source de Po-Be. Cette courbe nous a permis de calculer le rendement quantique de ce compteur pour les neutrons du Po-Be. La valeur trouvée est en accord avec la valeur calculée, et de l'ordre de 3.10^{-6}.

La courbe 2 montre que le compteur à coque de laiton est pratiquement insensible aux neutrons rapides, et la courbe 3 que l'effet des photons γ du Ra C sur le compteur à coque de Be est négligeable.

Cette étude a été entreprise et menée sous la direction de M. A. Rogozinski que je tiens à remercier ici.

Manuscrit reçu le 7 mai 1955.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Rogozinski A. — *J. Physique Rad.*, 1951, **12**, 955-956.

ETUDES SUR LE SPECTRE CONTINU « TECHNIQUE » DES RAYONS X.

II. FORMULE UNIVERSELLE POUR LES COEFFICIENTS D'ABSORPTION MASSIQUE GLOBALE, $\frac{\mu}{\rho}$, DES RAYONS X ET γ

Par H. TELLEZ-PLASENCIA,

Chargé de Recherches au C. N. R. S.,
Laboratoire Central des Services chimiques de l'État.

Sommaire. — On connaît un certain nombre de formules théoriques ou empiriques rendant compte, soit des coefficients d'absorption photoélectrique des rayons X et γ, soit de ceux de la diffusion Thompson ou Compton. Mais il n'en existe pas pour l'absorption globale, réunissant ces deux processus.

Basée sur une série de valeurs expérimentales de divers auteurs, pour plusieurs corps et pour une large bande de longueurs d'onde, on propose une formule qui traduit bien les moyennes de ces données, et qu'il est aisé de dériver.

Dans les problèmes d'absorption des rayons X, c'est le coefficient global $\frac{\mu}{\rho}$ qui définit les faits d'expérience. Les composantes — absorption photoélectrique $\frac{\tau}{\rho}$, diffusion $\frac{\sigma_c}{\rho}$ — sont éventuellement calculées en admettant la validité des formules qui définissent l'une pour en déduire l'autre. Il conviendrait donc d'avoir une expression analytique de $\frac{\mu}{\rho}$, et aisément dérivable, en vue des changements de coordonnées [1].

Or, cette expression d'ensemble n'existe pas, et celles des composantes se prêtent mal à la dérivation. Les courbes de $\log\frac{\mu}{\rho} = f(\log\lambda)$ (*fig.* 1) rectilignes pour les grandes λ, ont une allure sigmoïde dès que la diffusion Compton devient prépondérante. Nous avons cherché à les représenter au moyen d'une formule empirique, offrant une bonne moyenne des points expérimentaux. Nous avons réuni, pratiquement, les données de tous les auteurs qui ont exploré des zones spectrales suffisamment étendues : des auteurs allemands ([2] à [9]) ayant généralement utilisé des rayonnements de fluorescence et des filtres différentiels, dans la zone des $\lambda > 0{,}1$ Å; des anglo-saxons ([10] à [17]) se servant de monochromateurs à cristal pour étudier la région de $\lambda < 0{,}1$ Å. Les données des uns et des autres s'imbriquent assez bien, et nous avons basé notre choix sur la continuité de l'alignement.

Nous avons accordé une attention spéciale à deux auteurs : Allen, dont les mesures [18], [19] ont servi de canevas à des tables, reproduites dans la plupart des recueils [20], [21] et Victoreen [22] dont les tables sont tirées d'une formule théorique de $\frac{\tau}{\rho}$. Les données du premier sont en discordance — généralement par excès — avec celles d'autres auteurs, dans la partie intermédiaire des courbes. Celles du deuxième semblent un peu faibles par rapport à l'expérience, pour les λ courtes et les corps lourds.

Notre formule a la forme, pour la zone d'absorption K (λ en Å) :

$$\log\left(\frac{\mu}{\rho}\right)_K = a + b\log\lambda + m.10^{n(-\log\lambda)^p}. \qquad (1)$$

Dans la figure 1, les lignes continues montrent l'allure de cette fonction pour cinq absorbants courants : l'air $(\bar{Z} = 7{,}683)$ et ^{13}Al, ^{29}Cu, ^{50}Sn, ^{82}Pb. Elle est valable entre la discontinuité K et la limite d'absorption par matérialisation. Sauf pour le plomb, les données expérimentales manquent pour $\lambda < 10$ U. X., mais la coïncidence est bonne avec la formule de Klein-Nishina, considérée comme valable.

En y ajoutant les courbes (non représentées) de ^{20}Ca, ^{42}Mo et ^{73}Ta, nous avons pu obtenir des formules d'interpolation pour les paramètres de la formule (1)

$$a = 4{,}91130 - 8{,}98235\,Z^{-0{,}34138}, \qquad (2)$$

$$b = 2{,}11214 + 0{,}95918 . 0{,}98589^{Z}, \qquad (3)$$

$$\log m = 1{,}70749 - 0{,}62688\log Z + 19{,}1845 . 0{,}016449 \qquad (4)$$

$$-n = 1{,}22998 + 6{,}92293\,|\log Z - 1{,}11394|^{2{,}44585}, \qquad (5)$$

$$-p = 3{,}45193 + 3{,}74623 . 0{,}97219^{Z}. \qquad (6)$$

Les écarts, par rapport aux paramètres empiriques, sont indiqués dans le tableau I et les courbes en pointillé de la figure 1 montrent les résultats de la formule (1) avec les paramètres calculés d'après les formules (2) à (6). Les écarts sont plus grands pour les corps légers.

La pente b de la partie droite décroît avec Z. Nous avons groupé dans la figure 3 les valeurs de b trouvées par plusieurs auteurs ([23] à [27]) pour leurs propres droites. La dispersion est grande, et notre courbe de b n'en exprime pas la moyenne. Mais en composant, pour chaque corps, les données de plusieurs auteurs (y compris d'autres qui n'ont pas calculé la pente b), comme nous l'avons fait pour la figure 1 et pour les trois autres corps (Ca, Mo, Ta),

les écarts se compensent, et les moyennes s'élèvent. C'est pourquoi nos valeurs de $\frac{b}{q}$ (tableau I) sont plus hautes que celles de Grothey [23] et de Rindfleisch [25].

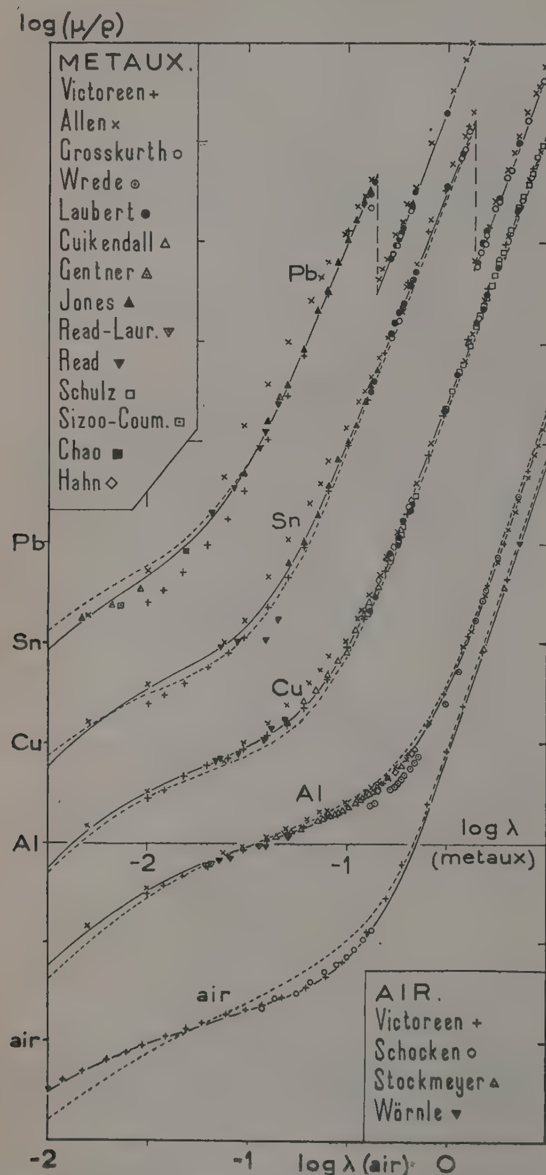


Fig. 1. — Les valeurs de log $\frac{\mu}{\rho}$ en fonction de log λ.

En trait continu, courbes calculées d'après des valeurs empiriques des paramètres, déduites directement des points expérimentaux; en pointillé, mêmes courbes, d'après les paramètres déduits des formules (2) à (6).

Les ordonnées marquées du symbole d'un corps correspondent à la valeur log $\frac{\mu}{\rho}$ = — 1 pour ce corps. L'intervalle entre deux traits représente 0,5 unités log.

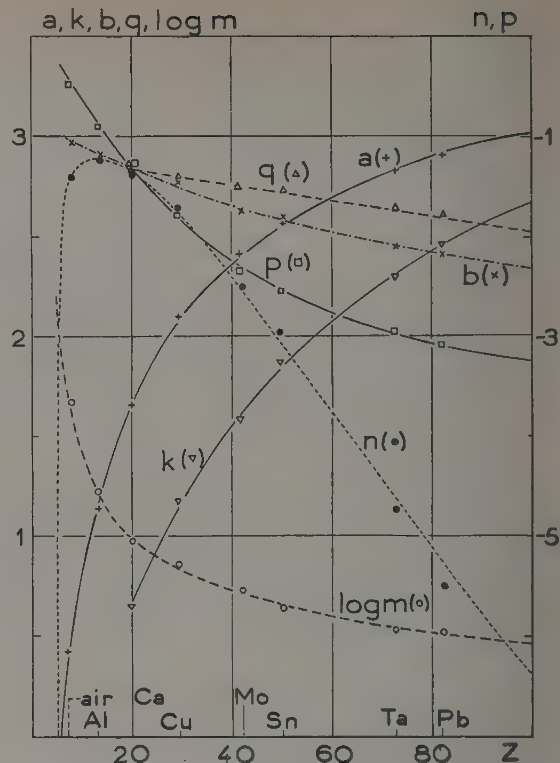


Fig. 2. — Valeurs empiriques ou calculées des paramètres des formules (1) et (8), en fonction de Z.

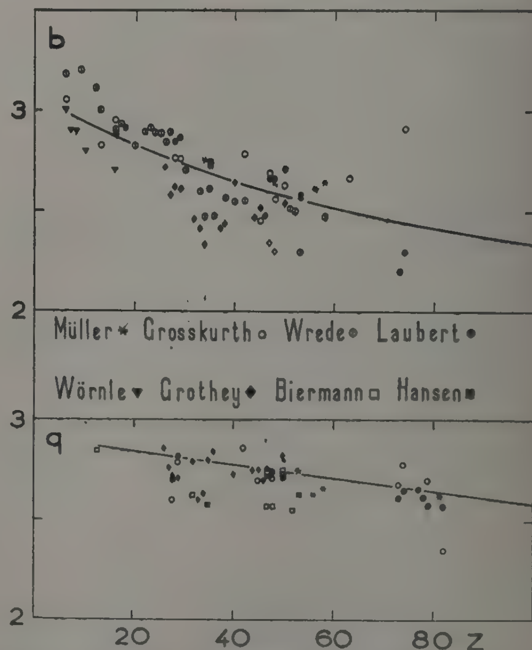


Fig. 3. — Valeurs des paramètres b et q, en fonction de Z, d'après plusieurs auteurs; courbes des formules (3) et (9).

Pour la zone d'absorption L, où la diffusion est négligeable, nous obtenons

$$\log\left(\frac{\mu}{\rho}\right)_L = k + q\log\lambda, \qquad (7)$$

avec

$$q = 2{,}91168 - 0{,}00383\,Z. \qquad (8)$$

Mêmes remarques (*fig.* 3) pour q que pour b.

Quant à k, sa valeur doit correspondre à celle du saut d'absorption K, δ_K, pour la λ-limite, λ_K; nous avons déjà donné ([28], form. (5)) une expression de

$$\log\delta_K = s + t\log\lambda_K \qquad (s = 0{,}85765;\ t = 0{,}28430); \qquad (9)$$

or, d'après la définition de δ_K,

$$\log\delta_K = \log\left(\frac{\mu}{\rho}\right)_K - \log\left(\frac{\mu}{\rho}\right)_L \qquad (10)$$

et les formules (1) (dans sa partie droite) (7) et (9), on déduit

$$k = a - s + (b - t - q)\log\lambda_K. \qquad (11)$$

Les formules (1) et (7) sont aisément dérivables

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mu}{\rho}\right)_K}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mu}{\rho}\,\frac{1}{\lambda}\left[b - np(-\log\lambda)^{p-1} \times m\,.\,10^{n(-\log\lambda)^p}\log_e 10\right]. \qquad (12)$$

Tableau I.

Valeurs des paramètres des formules (1) *et* (9).

Corps Z	Air, 7,683.	Al, 13.	Ca, 20,	Cu, 29.	Mo, 42.	Sn, 50,	Ta, 73	Pb, 82.
Zone *K*.								
a	0,41810	1,14625	1,66112	2,09044	2,41533	2,56897	2,90103	2,90896
	0,43324	*1,16925*	*1,68098*	*2,06578*	*2,40379*	*2,54867*	*2,83503*	*2,91578*
$\frac{\delta a}{a}$	+0,03621	+0,02007	+0,01196	—0,01180	—0,00478	—0,00790	—0,02275	+0,00234
b	2,97380	2,88536	2,84286	2,76680	2,63813	2,58621	2,44403	2,40848
	2,97213	*2,90956*	*2,83408*	*2,74742*	*2,64029*	*2,58355*	*2,45215*	*2,41134*
$\frac{\delta b}{b}$	—0,00056	+0,00839	—0,00309	—0,00700	+0,00150	—0,00103	+0,00332	+0,00118
$\log m$	1,65985	1,19567	0,97879	0,86238	0,73019	0,63286	0,53411	0,52144
	1,65736	*1,20680*	*0,98354*	*0,83797*	*0,71430*	*0,66032*	*0,54851*	*0,51517*
$\frac{\delta\log m}{\log m}$	—0,00150	+0,00931	+0,00485	—0,02831	—0,02176	+0,03456	+0,02696	—0,01202
$-n$	1,42578	1,22997	1,36105	1,73280	2,46582	2,97269	4,76331	5,51394
	1,41669	*1,13000*	*1,34477*	*1,75536*	*2,55925*	*3,09574*	*4,64838*	*5,23950*
$\frac{\delta n}{n}$	+0,00617	—0,00003	+0,01196	—0,01302	—0,03789	—0,04139	+0,02413	+0,04977
p	0,46875	0,90900	1,28564	1,70068	2,28501	2,56410	2,99792	3,08261
	0,43603	*0,85576*	*1,32096*	*1,79876*	*3,30630*	*2,53774*	*2,97410*	*3,08124*
$\frac{\delta p}{p}$	+0,06980	+0,05011	—0,02747	—0,05767	—0,00932	+0,01028	+0,00795	+0,00044
Zone *L*.								
k	-	-	0,66532	1,17633	1,59403	1,87749	2,30513	2,47174
	-	-	*0,68475*	*1,18829*	*1,62852*	*1,86718*	*2,31916*	*2,45555*
$\frac{\delta k}{k}$	-	-	+0,02920	+0,01017	+0,02113	—0,00549	+0,00609	—0,00655
q	-	-	2,84100	2,81513	2,73902	2,73732	2,61599	2,61501
	-	-	*2,83508*	*2,80061*	*2,75082*	*2,72018*	*2,63209*	*2,57069*
$\frac{\delta q}{q}$	-	-	—0,00208	—0,00516	+0,00431	—0,00626	+0,00615	—0,01695
$\frac{b}{q}$	-	-	1,00065	0,98283	0,96317	0,94480	0,93426	9,92102

Chiffres en caractère ordinaire : valeurs empiriques.

Chiffres en caractère italique : valeurs calculées d'après les formules (2) à (6).

Le facteur entre crochets est la dérivée des courbes logarithmiques (*fig.* 1) $\frac{d \log\left(\frac{\mu}{\rho}\right)_K}{d \log \lambda}$: il tend vers la valeur constante b.

Pour la formule (7) et, aux symboles près, pour la partie droite de (1), nous aurons

$$\frac{d\left(\frac{\mu}{\rho}\right)_L}{d\lambda} = \frac{q}{\lambda}\frac{\mu}{\rho}. \tag{13}$$

En conclusion, les formules ci-dessus, faciles à calculer et à dériver, coïncident bien avec les faits expérimentaux sur toute la bande des rayons X et γ, pour $Z > 10$; un peu moins bien, tout en restant valables, pour les corps légers.

Manuscrit reçu le 15 décembre 1954.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Tellez-Plasencia H. — *J. Physique Rad.*, 1954, **15**, 352.
[2] Shocken H. — *Z. Physik*, 1929, **58**, 39.
[3] Stockmeyer W. — *Ann. Physik*, 1932, **12**, 71.
[4] Wornle B. — *Ann. Physik*, 1930, **5**, 475.
[5] Grosskurth K. — *Ann. Physik*, 1934, **20**, 197.
[6] Wrede W. — *Ann. Physik*, 1939, **36**, 681.
[7] Lambert S. — *Ann. Physik*, 1941, **40**, 553.
[8] Schulz K. — *Ann. Physik*, 1936, **27**, 1.
[9] Gentner G. — *Physik Z.*, 1937, **38**, 836.
[10] Hahn T. M. — *Phys. Rev.*, 1934, **46**, 149.
[11] Cuykendall T. R. — *Phys. Rev.*, 1936, **50**, 105.
[12] Jones M. T. — *Phys. Rev.*, 1936, **50**, 105.
[13] Read J. — *Proc. Roy. Soc.*, London, 1935, A **152**, 402.
[14] Read J. et Lauristen C. A. — *Phys. Rev.*, 1924, **45**, 433.
[15] Stoner E. C. et Martin L. H. — *Proc. Roy. Soc.*, London, 1925, A **107**, 312.
[16] Chao C. Y. — *Proc. Roy. Soc.*, London, 1932, A **135**, 206.
[17] Sizoo G. J. et Coumou J. — *Physica*, 1936, **3**, 921.
[18] Allen S. J. M. — *Phys. Rev.*, 1926, **27**, 266.
[19] Allen S. J. M. — *Phys. Rev.*, 1926, **28**, 907.
[20] Landolt-Bornstein. — *Zahlenwerte und Funktionnen*, 6e édition, 1 Bd., 1 Teil., Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg.
[21] *Handbook of Chemistry and Physics*, 35e édition, 1954. Chemical Rubber Publishing Co, Cleveland (Ohio).
[22] Victoreen J. A. — *J. Appl. Physics*, 1949, **20**, 1141.
[23] Grothey W. — *Ann. Physik*, 1936, **25**, 577.
[24] Biermann H. H. — *Ann. Physik*, 1936, **26**, 740.
[25] Rindfleisch H. — *Ann. Physik*, 1937, **28**, 409.
[26] Muller I. — *Ann. Physik*, 1938, **32**, 625.
[27] Hansen H. — *Ann. Physik*, 1939, **35**, 524.
[28] Tellez-Plasencia H. — *J. Physique Rad.*, **10**, 14.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM. TOME 16, AOUT-SEPTEMBRE 1955, PAGE 712.

STABILITÉ ET STABILISATION DES AÉRODYNES

Par L. FRAGER,
Ingénieur E. P. C. I.

Sommaire. — Les vitesses aléatoires de l'air et d'un aérodyne s'y déplaçant font l'objet d'une relation statistique dans laquelle apparaissent la matrice globale de fonctionnement de cet aérodyne ainsi que les tenseurs spectraux de corrélation des vitesses respectives (air et aérodyne).

1. **Introduction**. — Dans le cas de phénomènes aléatoires classiques (bruits de fond, turbulences, etc.), on définit généralement deux sortes de tenseurs : le tenseur de corrélation et à partir de ce dernier et par la transformation de Fourier le tenseur spectral de corrélation. On passera ensuite par la notion de récurrence fictive pour faire apparaître le concept du spectre isolé de façon à mettre en jeu les relations banales entre excitations harmoniques et réponses harmoniques.

De la notion de spectre isolé, nous passerons ensuite à celle du tenseur spectral de corrélation en faisant intervenir d'ailleurs des moyennes.

En introduisant cette notion, il a été possible de faire apparaître la relation matricielle entre le tenseur spectral de corrélation aux excitations et le tenseur spectral de corrélation aux réponses.

2. **Définition de la corrélation** [1]. — Supposons un champ de vitesses variables dans l'espace et trois axes de références orthogonaux 1, 2, 3; soient x_1, x_2, x_3 les coordonnées d'un point dit de centrage.

Nous appellerons « composante avancée » suivant l'axe i une certaine composante des vitesses u_i en un point de coordonnées

$$x_1+\frac{h_1}{2}, \quad x_2+\frac{h_2}{2}, \quad x_3+\frac{h_3}{2};$$

nous appellerons « composante reculée » suivant l'axe k une certaine composante u'_k en un point de coordonnées

$$x_1-\frac{h_1}{2}, \quad x_2-\frac{h_2}{2}, \quad x_3-\frac{h_3}{2};$$

les axes de référence respectifs i et k peuvent être choisis arbitrairement ($i = 1, 2, 3$; $k = 1, 2, 3$); formons à présent le produit

$$P_{ik} = u_i u'_k.$$

Ce produit que nous convenons d'appeler corrélation isolée est une fonction de deux vecteurs :

le vecteur d'intervalle $\vec{h}$; le vecteur de position du centre de la corrélation isolée $\vec{x}$.

Nous pouvons exprimer cette particularité en écrivant

$$P_{ik}(h_1, h_2, h_3, x_1, x_2, x_3) = u_i u'_k. \tag{2.1}$$

Nous pouvons à présent former un tableau exprimant le « tenseur de corrélation isolée » au moyen du terme générique P_{ik} et dont voici l'expression :

$$\begin{matrix} u_1 u'_1 & u_1 u'_2 & u_1 u'_3, \\ u_2 u'_1 & u_2 u'_2 & u_2 u'_3, \\ u_3 u'_1 & u_3 u'_2 & u_3 u'_3. \end{matrix} \tag{2.2}$$

Pour étudier les variations de P_{ik} avec le vecteur d'intervalle $\vec{h}$, nous commencerons par fixer la direction de $\vec{h}$ comme étant celle d'un axe orienté H qui sera « l'axe de la corrélation ».

Nous appellerons cette hypothèse

Hypothèse 3. (2.3)

Déplaçons à présent le centre de la corrélation le long d'un axe arbitraire 4 que nous appellerons l'axe d'exploration

Hypothèse 4. (2.4)

En appelant maintenant h l'abscisse de l'intervalle de corrélation portée sur l'axe H et x_4 l'ordonnée du « centre de corrélation isolée » prise sur l'axe d'exploration 4, nous aurons en vertu de (2.2), (2.3) et (2.4),

$$P_{ik} = (h, x_4) = u_i u'_k. \tag{2.5}$$

Nous pouvons former à présent un tableau synoptique que nous appellerons « tenseur de corrélation » et formé de la manière suivante au moyen des éléments du tableau (2) exprimant le tenseur de corrélation isolée : le terme générique de ce nouveau tenseur sera

$$R_{ik}(x_4, h) = \frac{1}{\chi}\int_{x_4=r-\frac{\chi}{2}}^{r+\frac{\chi}{2}} u_1 u'_k \, dx_4, \tag{2.6}$$

$r - \frac{\chi}{2}$ est l'abscisse initiale et $r + \frac{\chi}{2}$ l'abscisse finale du segment exploré le long de l'axe 4; r est l'abscisse du centre de la corrélation.

Nous pourrons encore faire l'hypothèse (2.7) que l'axe 4 d'exploration est parallèle ou confondu avec l'axe H de la corrélation.

3. **Tenseur spectral de corrélation** [2], [3]. — Le terme générique de ce tenseur, désigné par Φ_{ik}, est obtenu par une intégration de Fourier sur le terme générique R_{ik} du tenseur de corrélation

$$\Phi_{ik} = \frac{1}{2\pi}\int_{h=-\infty}^{\infty} R_{ik}(h)\, e^{-j\Omega h}\, dh. \tag{3.1}$$

Ω est un coefficient de resserrement des ondulations comparable à la fréquence angulaire lorsqu'il s'agit d'une fonction sinusoïdale du temps.

4. **Récurrence fictive.** — Dans l'exposé qui va suivre, nous procèderons à des récurrences fictives sur des fonctions obtenues à partir de u_i et de u'_k, nous aurons ainsi de nouvelles fonctions $\mathcal{P}_{ik}$, pour les corrélations isolées et $\mathcal{R}_{ik}$ pour les corrélations proprement dites.

Nous démontrerons que les corrélations R_{ik} et $\mathcal{R}_{ik}$ tendent vers une seule et même limite lorsque la longueur Λ de récurrence tend vers l'infini.

4.1. Définition des fonctions a récurrence fictive [4]. — Formons les deux fonctions périodiques suivantes, la périodicité jouant sur l'abscisse x

$$v_i\left(x+\frac{h}{2}, x_4\right), \quad v'_k\left(x-\frac{h}{2}, x_4\right). \tag{4.1}$$

Ces fonctions sont respectivement égales à $u_i\left(x+\frac{h}{2}\right)$ et $u_k\left(x-\frac{h}{2}\right)$ sur une étendue de l'axe 4 comprise entre les points d'abscisse $x_4-\frac{\Lambda}{2}$ et $x_4+\frac{\Lambda}{2}$, Λ étant la longueur de récurrence des fonctions

$$v_i\left(x+\frac{h}{2}, x_4\right), \quad v'_k\left(x-\frac{h}{2}, x_4\right).$$

Nous avons ainsi pour les développements en séries de Fourier en faisant $h = 0$:

$$v_i(x, x_4) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} C_{iq}(x_4)\, e^{j\Delta\Omega q x}, \tag{4.2}$$

$$v_k(x, x_4) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} C_{kr}(x_4)\, e^{j\Delta\Omega r x}; \tag{4.3}$$

x_4 est le centre de la corrélation isolée;
x est l'abscisse du point de l'axe 4 où sont mesurées v_i et v_k;
$\Delta\Omega$ est « l'intervalle spectral ».

Nous aurons pour former les fonctions de l'espace qui sont v_i et v_k à utiliser une partie seulement des fonctions u_i et u_k, partie qui est essentiellement sous la dépendance de l'abscisse x_4 de centrage de sorte que les coefficients C_{iq} et C_{kr} qui apparaîtront dans les développements respectifs des fonctions v_i et v_k sont évidemment des fonctions de cette abscisse x_4.

4.2. Corrélation isolée. — Calculons à présent, en nous inspirant des formules (4.2) et (4.3) la composante avancée de la fonction fictive v_i et la composante reculée de la fonction fictive v_k

$$v_i\left(x+\frac{h}{2}, x_4\right) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} C_{iq}(x_4)\, e^{jq\,\Delta\Omega\left(x+\frac{h}{2}\right)}, \quad (4.4)$$

$$v'_k\left(x-\frac{h}{2}, x_4\right) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} C_{ir}(x_4)\, e^{jr\,\Delta\Omega\left(x-\frac{h}{2}\right)}. \quad (4.5)$$

Si nous effectuons le produit membre à membre,

$$\mathcal{P}_{ik} = v_i v'_k = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} C_{iq}(x_4)\, C_{kr}(x_4) \times e^{j\,\Delta\Omega\left[(q+r)x+(q-r)\frac{h}{2}\right]}. \quad (4.6)$$

Si nous prenons la valeur moyenne, nous retiendrons seulement les termes indépendants de x.

Pour ces termes, nous avons

$$q + r = 0 \quad (4.7)$$

et en posant

$$\Delta\Omega\, q = \Omega, \quad (4.8)$$

en rappelant que

$$C_{kq} = \tilde{C}_{k(-q)}, \quad (4.9)$$

nous avons, en vertu des équations (4.6), (4.7), (4.8) et (4.9) et en calculant la valeur moyenne de $\mathcal{P}_{ik}$ pour les différentes abscisses

$$\overline{\mathcal{P}}_{ik}(h) = \frac{1}{\Lambda}\int_{x=x_4-\frac{\Lambda}{2}}^{x_4+\frac{\Lambda}{2}} \mathcal{P}_{ik}\, dx$$

$$= \sum_{q=-\infty}^{\infty} C_{iq}(x_4)\, \tilde{C}_{kq}(x_4)\, e^{j\Omega h}. \quad (4.10)$$

Supposons à présent que nous procédions sur $\mathcal{P}_{ik}$ à une intégration de Fourier par rapport à h

$$\psi_{ik}(x_4) = \frac{1}{2\pi} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \int_{h=-\frac{\pi}{2\Delta\Omega}}^{\frac{\pi}{2\Delta\Omega}} C_{iq}(x_4)\, \tilde{C}_{kq}(x_4) \times e^{j\Omega h}\, e^{-jq\Delta\Omega h}\, dh, \quad (4.11)$$

$$\psi_{ik}(x_4) = \frac{1}{\Delta\Omega} C_{iq}(x_4)\, \tilde{C}_{kq}(x_4). \quad (4.12)$$

4.3. Corrélation proprement dite. — Nous prendrons ensuite la valeur moyenne ψ_{ik} de $\psi_{ik}(x_4)$ pour les divers centrages d'abscisses x_4 intérieurs à un segment de l'axe 4 compris entre les points d'abscisse

$$x_{04} - \frac{\chi}{2}, \quad x_{04} + \frac{\chi}{2}.$$

Démontrons à présent que la valeur ψ_{ik} qui résulte de l'équation (4.12) tend vers la valeur Φ_{ik} exprimée par l'équation (3.1) lorsque χ tend vers l'infini.

Représentons, en effet, les deux fonctions

$$v_i\left(x+\frac{h}{2}, x_4\right), \quad v_k\left(x-\frac{h}{2}, x_4\right)$$

pour une valeur donnée de x_4 par leurs courbes respectives en fonction de l'espace.

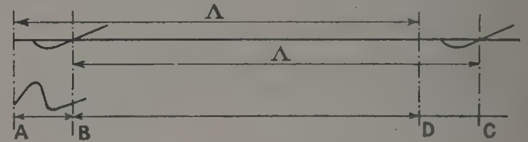


Fig. 1.

La période Λ de récurrence fictive est représentée par l'intervalle AD. Nous avons dans l'intervalle AD deux régions distinctes : le segment AB et le segment BD.

Nous démontrerons en premier lieu que dans l'intervalle AB la contribution du produit des deux quantités

$$v_i\left(x+\frac{h}{2}, x_4\right) \quad \text{et} \quad v_k\left(x-\frac{h}{2}, x_4\right)$$

au produit moyen dans l'intervalle complet AD est négligeable. En effet, dans l'intervalle AB, nous associons le début de la période de la fonction $v_i\left(x+\frac{h}{2}, x_4\right)$ et la fin de la période de la fonction $v_k\left(x-\frac{h}{2}, x_4\right)$.

Or l'intervalle de corrélation dans le segment AB est $\Lambda - h$, Λ étant très grand et très supérieur à l'intervalle d'extinction h_e à partir duquel la corrélation est devenue pratiquement négligeable. Dans l'intervalle BD, par contre, les produits seront identiques pour les fonctions non récurrentes u_i et u'_k et pour les fonctions à récurrence fictive v_i et v'_k.

Si nous comparons à présent la moyenne des produits P_{ik} faits au moyen des fonctions originales u_i, u'_k aux moyennes des produits $\mathcal{P}_{ik}$ faits au moyen des fonctions à récurrences fictives, nous aurons

$$\frac{\mathcal{P}_{ik}}{R_{ik}} = 1 - \frac{h}{\Lambda}.$$

Si nous convenons de ne considérer h qu'entre $-h_e$ et h_e, h_e étant l'intervalle d'extinction et si $\frac{h_e}{\Lambda}$ demeure négligeable devant l'unité, Λ ayant été choisi suffisamment grand, on pourra dire que $\mathcal{R}_{ik}$ tendra vers R_{ik} et dans ce cas $\psi_{ik} \to \Phi_{ik}$.

C. Q. F. D.

5. **Relations entre tenseurs spectraux.** — Les écarts de vitesse par rapport aux vitesses moyennes permettent de définir deux tenseurs spectraux, l'un relatif aux mouvements de l'air, l'autre relatif aux mouvements de l'aérodyne.

Dans ce but, nous imaginerons un champ de vitesses fictif dont la mesure le long de l'axe d'exploration 4 répond à une loi de récurrence.

Supposons un observateur parcourant l'axe 4 à une vitesse uniforme V. Pour cet observateur, chacune des composantes de vitesses est une fonction fictive et périodique du temps et égale à la fonction réelle dans un intervalle de temps $T = \frac{\Lambda}{V}$.

Dans ces conditions, le coefficient de resserrement défini par l'équation (4.8) répond à l'équation $\Omega = \frac{\omega}{V}$ ω étant la fréquence angulaire. Nous définirons ainsi, dans les développements en séries de Fourier, des coefficients complexes $\overset{*}{\mathcal{U}}_{lq}$ identiques aux coefficients C_{lq}, l'astérisque précise qu'il s'agit de l'air. La réponse de l'aérodyne dans ce champ à récurrence fictive sera une autre fonction périodique de même période $T = \frac{\Lambda}{V}$. Les écarts de vitesse de l'aérodyne qui se déplace dans ce champ seront exprimés par les développements en séries de Fourier afférents à chacune des composantes et notés $\mathcal{U}_{lq}$.

Dans un rapport (1285 P, nº 8, O.N.E.R.A.) [6] et [2], l'auteur a dégagé les relations matricielles entre les vitesses harmoniques de l'aérodyne et les vitesses harmoniques de l'air et énoncé l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{U}_1 \\ \mathcal{U}_2 \\ \mathcal{U}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{*}{\mathcal{U}}_1 \\ \overset{*}{\mathcal{U}}_2 \\ \overset{*}{\mathcal{U}}_3 \end{bmatrix}. \qquad (5.1)$$

Nous rappelons que toute grandeur sinusoïdale peut être décomposée en deux grandeurs complexes conjuguées, l'une appelée composante directe et l'autre composante inverse. Il en est ainsi si nous considérons une répartition des vitesses telle que pour l'observateur parcourant l'axe 4 à vitesse uniforme, il constate une variation sinusoïdale de chacune des projections des vitesses rencontrées.

Les grandeurs complexes exprimant ces projections seront celles afférentes aux composantes directes; elles seront exprimées par $\overset{*}{\mathcal{U}}_1$, $\overset{*}{\mathcal{U}}_2$, $\overset{*}{\mathcal{U}}_3$ pour l'air et $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$, $\mathcal{U}_3$ pour l'aérodyne, l'observateur accompagnant ce dernier le long de l'axe 4.

Cette relation entraîne la relation ci-après obtenue en prenant les valeurs conjuguées, en transposant ensuite les matrices dans les deux membres de (5.1) et enfin en inversant l'ordre des facteurs

$$[\tilde{\mathcal{U}}_1, \tilde{\mathcal{U}}_2, \tilde{\mathcal{U}}_3] = \left[\tilde{\overset{*}{\mathcal{U}}}_1, \tilde{\overset{*}{\mathcal{U}}}_2, \tilde{\overset{*}{\mathcal{U}}}_3\right] \begin{bmatrix} \tilde{c}_{11} & \tilde{c}_{21} & \tilde{c}_{31} \\ \tilde{c}_{12} & \tilde{c}_{22} & \tilde{c}_{32} \\ \tilde{c}_{13} & \tilde{c}_{23} & \tilde{c}_{33} \end{bmatrix}. \qquad (5.2)$$

Faisons les produits membre à membre dans les équations (5.1) et (5.2), nous obtenons

$$\begin{bmatrix} \mathcal{U}_1 \\ \mathcal{U}_2 \\ \mathcal{U}_3 \end{bmatrix} [\tilde{\mathcal{U}}_1, \tilde{\mathcal{U}}_2, \tilde{\mathcal{U}}_3] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{*}{\mathcal{U}}_1 \\ \overset{*}{\mathcal{U}}_2 \\ \overset{*}{\mathcal{U}}_3 \end{bmatrix} \times \left[\tilde{\overset{*}{\mathcal{U}}}_1, \tilde{\overset{*}{\mathcal{U}}}_2, \tilde{\overset{*}{\mathcal{U}}}_3\right] \begin{bmatrix} \tilde{c}_{11} & \tilde{c}_{21} & \tilde{c}_{31} \\ \tilde{c}_{12} & \tilde{c}_{22} & \tilde{c}_{32} \\ \tilde{c}_{13} & \tilde{c}_{23} & \tilde{c}_{33} \end{bmatrix}. \qquad (5.3)$$

Si à présent nous avons recours aux moyennes le long de l'axe 4, $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$, $\mathcal{U}_3$, ... étant fonctions de x_{04}, nous écrirons finalement en nous inspirant de l'équation (4.12) au lieu et place des produits des matrices colonnes par les matrices lignes qui figurent dans (5.3), les tenseurs de corrélation respectifs $[\Phi]$ et $\left[\overset{*}{\Phi}\right]$ et la relation suivante s'ensuit :

$$[\Phi] = [c] \left[\overset{*}{\Phi}\right] [\tilde{c}']. \qquad (5.4)$$

En prémultipliant les deux membres de (5.4) par $[\beta]$ la matrice inverse de $[c]$ et en post-multipliant ensuite par la conjuguée transposée $[\tilde{\beta}]'$ de $[\beta]$, nous avons la relation inverse de (5.4)

$$[\beta] [\Phi] [\tilde{\beta}'] = \left[\overset{*}{\Phi}\right]. \qquad (5.5)$$

6. **Surfaces représentatives.** — Chacun des éléments d'un tenseur spectral est une fonction de l'axe directeur de la corrélation. Nous pouvons donc porter à partir d'un pôle et le long des différents axes directeurs des longueurs égales à l'amplitude spectrale correspondant à une fréquence donnée. Nous pouvons ainsi construire une surface des amplitudes à égales fréquences.

Dans le cas d'isotropie, ces surfaces sont des sphères et n'existent que pour les termes diagonaux du tenseur, les autres termes étant nuls.

7. **Formes tensorielles et symétries.** — Supposons un tenseur spectral de corrélation établi en prenant comme axe directeur l'axe 1 du trièdre trirectangle de référence 1, 2, 3 (1 vers l'avant, 2 à droite, 3 vers le bas).

Supposons que les turbulences étudiées soient provoquées par un obstacle ou des parois qui présentent une symétrie par rapport au plan vertical 1, 3.

Nous énoncerons ce principe qu'à la symétrie des causes correspond la symétrie des effets; nous devons donc retrouver dans les turbulences la symétrie par rapport au plan vertical 1, 3.

Si nous changeons le signe conventionnel porté sur l'axe 2, l'expression tensorielle des corrélations spectrales ne doit pas changer. Ceci a pour conséquence que tous les éléments du tenseur qui ne portent l'indice 2 qu'une seule fois sont nuls. Nous avons ainsi :

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & 0 & \Phi_{12} \\ 0 & \Phi_{22} & 0 \\ \Phi_{31} & 0 & \Phi_{33} \end{bmatrix}. \qquad (7.1)$$

Imaginons à présent une double symétrie plane : la première par rapport au plan vertical 1, 3; la seconde par rapport au plan horizontal 1, 2; le tenseur spectral aura la forme

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{33} \end{bmatrix}. \qquad (7.2)$$

Dans le cas de la forme (7.2) l'axe directeur est placé dans une position symétrique par rapport aux plans 1, 2 et 1, 3. Dans le cas contraire, le tenseur $[\Phi]$ comporte nécessairement neuf termes.

Cherchons en effet quel sera le tenseur $[\bar{\Phi}]$ obtenu à partir du tenseur $[\Phi]$ si nous changeons les axes de références 1, 2, 3 et si nous prenons trois nouveaux axes de référence orthogonaux $\bar{1}$, 2, 3, $[\alpha]$ étant la matrice de transformation

$$[\bar{\Phi}] = [\alpha][\Phi][\alpha]^{-1}, \qquad (7.3)$$

le résultat de cette opération fait apparaître neuf termes purement réels. La somme des termes diagonaux dans $[\Phi]$ est égale à la somme des termes diagonaux dans $[\bar{\Phi}]$, car l'énergie par unité de volume n'a pas changé. Ensuite comme les déterminants $|\Phi|$ et $|\bar{\Phi}|$ sont égaux et que $[\bar{\Phi}]$ est une matrice symétrique, nous avons

$$\bar{\Phi}_{11} + \bar{\Phi}_{22} + \bar{\Phi}_{33} = \Phi_{11} + \Phi_{22} + \Phi_{33}, \qquad (7.4)$$

$$2\Phi_{12}\Phi_{13}\Phi_{23} = \bar{\Phi}_{12}^2\bar{\Phi}_{33} + \bar{\Phi}_{13}^2\bar{\Phi}_{22} + \bar{\Phi}_{23}^2\bar{\Phi}_{11}. \qquad (7.5)$$

Supposons à présent le cas d'une symétrie circulaire d'ordre 2 autour de l'axe de corrélation *H*, l'axe 1 de référence étant orienté suivant *H*. Si nous faisons tourner le trièdre trirectangle 1, 2, 3 de 180° autour de l'axe 1, cela revient à changer les conventions de signe sur les axes 2 et 3 et à considérer comme égaux les tenseurs avant et après transformation. Tous les termes qui ne contiendront qu'un seul indice mutatif (2 ou 3) seront nuls. Nous aurons donc

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{22} & \Phi_{23} \\ 0 & \Phi_{32} & \Phi_{33} \end{bmatrix}. \qquad (7.6)$$

Supposons à présent le cas d'une symétrie circulaire d'ordre 4 autour de l'axe 1. Dans ces conditions, si nous faisons tourner le trièdre de référence de 90° autour de l'axe 1 dans le sens positif, 2 vient en 3 et 3 vient en 2. Procédons aux substitutions d'indices correspondants, dans le tenseur spectral. Nous obtenons ainsi

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \Phi_{23} \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{13} & -\Phi_{12} \\ \Phi_{31} & \Phi_{22} & -\Phi_{32} \\ -\Phi_{21} & -\Phi_{23} & \Phi_{33} \end{bmatrix}. \qquad (7.7)$$

L'équation (7.7) exprime que les éléments occupant les mêmes positions dans les matrices du premier et du second membre sont égaux deux à deux. En particulier, nous avons

$$\Phi_{23} = -\Phi_{32}.$$

Donc les parties réelles de Φ_{23} et de Φ_{32} sont nulles puisque les tenseurs spectraux ont la forme hermitique ainsi qu'il ressort de l'équation (4.9). Nous avons ensuite

$$\Phi_{12} = \Phi_{13}, \qquad \Phi_{13} = -\Phi_{12}. \qquad (7.8)$$

Ceci n'est possible que si

$$\Phi_{12} = 0 = \Phi_{13}. \qquad (7.9)$$

Il reste donc finalement

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{22} & \Phi_{23} \\ 0 & \Phi_{32} & \Phi_{33} \end{bmatrix}, \qquad (7.10)$$

avec la condition que Φ_{23} et Φ_{32} sont imaginaires purs et conjugués. La forme (7.6) est compatible avec la forme qui est la conséquence de l'hypothèse d'une symétrie circulaire d'ordre 2. La forme (7.10) est bien celle qui convient dans l'hypothèse d'une symétrie circulaire d'ordre 4.

Ce dernier cas nous suggère d'imaginer un vecteur $\vec{u}$ décomposable en deux composantes sinusoïdales élémentaires $\mathcal{U}_2$ et $\mathcal{U}_3$ déphasées de $\frac{\pi}{2}$ dans l'espace, de sorte que leur résultante est un vecteur tournant pour un observateur qui se déplacerait suivant l'axe de corrélation 1. La forme du tenseur, dans ce cas, est

$$[\Phi[= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{22} & \Phi_{23} \\ 0 & \Phi_{32} & \Phi_{33} \end{bmatrix}, \qquad (7.11)$$

$$\Phi_{23} = -\Phi_{32} \quad \text{imaginaires purs.}$$

On peut dire en gros que les termes hors diagonale, lorsqu'ils sont complexes, expriment une tendance statistique à un certain déphasage entre deux composantes, c'est-à-dire une tendance rotatoire pour l'observateur qui se déplace suivant l'axe 1 de corrélation et de référence.

Enfin il convient de faire une remarque au sujet

des tenseurs spectraux qui figurent dans les équations (5.4) et (5.5).

Ces tenseurs spectraux sont mixtes car ils associent dans le champ aléatoire deux vecteurs de nature différente : l'un est une vitesse de translation et l'autre une vitesse de rotation.

Cette nature mixte n'empêchera d'ailleurs pas ces tenseurs d'obéir aux règles de forme que nous venons de préciser.

8. **Stabilisation.** — Lorsqu'un aérodyne vole dans un champ de vitesses à distribution aléatoire il est soumis à des déplacements dont les vitesses mesurées en son centre de gravité, donnent lieu, comme nous l'avons vu plus haut à la relation tensorielle (5.4)

$$[\Phi] = [c]\left[\overset{*}{\Phi}\right][\tilde{c}']. \qquad (8.1)$$

La matrice $[c]$ est la somme de deux matrices : la matrice $[M]$ propre à l'aérodyne commandes bloquées et la matrice propre au stabilisateur automatique linéaire de l'aérodyne

$$[c] = [M] + [K]. \qquad (8.2)$$

Nous avons évidemment ainsi la relation

$$[\tilde{c}'] = [\tilde{M}'] + [\tilde{K}']. \qquad (8.3)$$

L'énergie cinétique apparaît sous deux formes dans les termes diagonaux du tenseur $[\Phi]$ de l'équation (8.1), $\Phi_{11} + \Phi_{33}$ exprime deux fois l'énergie cinétique de translation pour la part qui revient au mouvement longitudinal et Φ_{22} exprime deux fois l'énergie cinétique de rotation pour la part revenant à ce même mouvement (nous supposons ici que la matrice $[c]$ est celle qui correspond à ce mouvement particulier).

Calculons ces deux énergies et à cet effet posons

$$[\alpha] = [c]\left[\overset{*}{\Phi}\right] \qquad (8.4)$$

et en vertu de l'équation (8.1) nous écrirons

$$[\Phi] = [\alpha][\tilde{c}']; \qquad (8.5)$$

en vertu de (8.4),

$$\alpha_{il} = \Sigma c_{im}\Phi_{ml} \qquad (8.6)$$

et en vertu de (8.5),

$$\Phi_{ik} = \sum_{m=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} c_{im}\overset{*}{\Phi}_{ml}\tilde{c}_{kl}, \qquad (8.7)$$

d'où les développements suivants du terme diagonal Φ_{ii} :

$$\begin{aligned}\Phi_{ii} = \; & c_{i1}\overset{*}{\Phi}_{11}\tilde{c}_{i1} + c_{i1}\overset{*}{\Phi}_{12}\tilde{c}_{i2} + c_{i1}\overset{*}{\Phi}_{13}\tilde{c}_{i3} \\ & + c_{i2}\overset{*}{\Phi}_{21}\tilde{c}_{i1} + c_{i2}\overset{*}{\Phi}_{22}\tilde{c}_{i2} + c_{i2}\overset{*}{\Phi}_{23}\tilde{c}_{i3} \\ & + c_{i3}\overset{*}{\Phi}_{31}\tilde{c}_{i1} + c_{i3}\overset{*}{\Phi}_{32}\tilde{c}_{i2} + c_{i3}\overset{*}{\Phi}_{33}\tilde{c}_{i3}. \end{aligned} \qquad (8.8)$$

On remarquera que les points situés à une certaine distance du centre de gravité feront l'objet d'une autre matrice de fonctionnement telle que $[c]$ et qui peut être déduite de $[c]$.

Ainsi on peut se rendre compte que le confort dépendra de la position du passager.

Les équations (8.8) et (8.9) seront donc calculées avec une matrice $[c]$ adaptée à une position moyenne convenable du passager.

Le stabilisateur devra donc être prévu de façon que les coefficients K_{rs} de sa matrice propre réalisent pour $\Phi_{11} + \Phi_{33}$ et pour Φ_{22} des « distribuantes » spectrales convenables du point de vue physiologique et aussi des niveaux rotatifs suffisamment bas pour l'ensemble des fréquences.

9. **Mesure des composantes de vitesse de l'aérodyne** [6]. — Les mesures respectives des composantes de vitesse de l'aérodyne dans ses propres axes 1, 2, 3 de coordonnées sont obtenues à partir des mesures des composantes d'accélération suivant les axes respectifs 1 et 3 et des mesures de la composante de rotation q suivant l'axe 2, θ étant l'angle de cabrage moyen.

Si nous désignons par $\underset{m}{\Delta S_1}$, $\underset{m}{\Delta S_3}$, Δq, $\mathcal{U}_{\vec{1}}$, $\mathcal{U}_{\vec{3}}$ les grandeurs et les phases respectives des quantités ci-après désignées, à un temps arbitraire pris pour origine :

$\underset{m}{\Delta S_1}$ étant relatif à la composante d'accélération suivant l'axe 1 de l'aérodyne;

$\underset{m}{\Delta S_3}$ étant relatif à la composante d'accélération suivant l'axe 3 de l'aérodyne;

Δq étant relatif à la composante de vitesses de rotation suivant l'axe 2 de l'aérodyne;

$\mathcal{U}_{\vec{1}}$ étant relatif à la composante de vitesse de translation suivant l'axe 1 de l'aérodyne;

$\mathcal{U}_{\vec{3}}$ étant relatif à la composante de vitesse de translation suivant l'axe 3 de l'aérodyne,

$$\begin{bmatrix} \underset{m}{\Delta S_1} - \left(\underset{0}{w} + \lambda^{-1} g \cos\theta\right)\Delta q \\ \underset{m}{\Delta S_3} + \left(\underset{0}{v} - \lambda^{-1} g \cos\theta\right)\Delta q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\,\mathcal{U}_{\vec{1}} \\ \lambda\,\mathcal{U}_{\vec{3}} \end{bmatrix}. \qquad (9.1)$$

10. **Conclusions.** — Une première relation matricielle fait ressortir le lien qui existe entre les composantes harmoniques des mouvements de l'air et les composantes harmoniques des mouvements de l'aérodyne muni de son pilote automatique. Cette relation sera résumée par

$$\{\mathcal{U}\} = [c]\{\overset{*}{\mathcal{U}}\} \qquad (10.1)$$

La relation des tenseurs spectraux des vitesses respectives de l'air et de l'aérodyne en découle

$$[\Phi] = [c]\left[\overset{*}{\Phi}\right][\tilde{c}']. \qquad (10.2)$$

L'inversion permet d'écrire

$$\left[\overset{*}{\Phi}\right] = [\beta][\Phi][\tilde{\beta}']. \qquad (10.3)$$

La relation (10.3) offre la possibilité de déduire le tenseur spectral des mouvements de l'air à partir du tenseur spectral des mouvements de l'aérodyne.

Le tenseur spectral des mouvements de l'aérodyne met en jeu les vitesses et sera aisément déduit du tenseur spectral des accélérations dont la mesure ne présente pas de difficulté technique particulière si l'on emploie des enregistreurs sur pistes optiques à densité constante.

Des tenseurs spectraux relevés pour les mouvements de l'air on déduira les tenseurs spectraux des mouvements de n'importe quel aérodyne muni d'un stabilisateur automatique et il sera possible d'adapter ce stabilisateur aux conditions physiologiques imposées par le confort des passagers.

En effet, la matrice $[c]$ est la somme de deux matrices : l'une $[M]$ propre à l'aérodyne, l'autre $[K]$ propre au stabilisateur automatique.

La relation (10.2) devient

$$[\Phi] = [M + K]\left[\overset{*}{\Phi}\right][\tilde{M}' + \tilde{K}']. \qquad (10.4)$$

On calculera la somme des termes diagonaux $\Phi_{11} + \Phi_{33}$ qui fait apparaître le double de l'énergie de translation par unité de largeur de bande de fréquences et par unité de masse et Φ_{22} qui fait apparaître le double de l'énergie de rotation par unité de largeur de bande de fréquence et par unité de moment d'inertie.

Ces expressions sont des fonctions des éléments de la matrice K propre au stabilisateur et l'on peut ainsi par le calcul s'assurer que le stabilisateur prévu répond bien aux conditions imposées.

Manuscrit reçu le 11 janvier 1955.

Liste des Symboles.

x_1, x_2, x_3	Coordonnées du centre de corrélation.
1, 2, 3	Axes de référence.
h_1, h_2, h_3	Composantes du vecteur d'intervalle.
u_1, u_2, u_3	Composantes avancées de la vitesse.
u'_1, u'_2, u'_3	Composantes reculées de la vitesse.
P_{ik}	Produit de corrélation ou corrélation isolée.
R_{ik}	Corrélation (terme générique du tenseur).
Φ_{ik}	Spectre de corrélation (terme générique du tenseur spectral de corrélation).
$\mathcal{P}_{ik}$	Produit de corrélation isolée dans le cas d'une récurrence fictive.
$\mathcal{R}_{ik}$	Corrélation dans le cas d'une récurrence fictive.
Λ	Période spatiale de récurrence.
v_1, v_2, v_3	Composantes avancées de la vitesse à récurrence fictive.
v'_1, v'_2, v'_3,	Composantes reculées de la vitesse à récurrence fictive.
ψ_{ik}	Spectre de corrélation isolée dans le cas de la récurrence fictive.
ψ_{ik}	Spectre de corrélation dans le cas de la récurrence fictive.
$\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3$; $\overset{*}{\mathcal{U}}_1, \overset{*}{\mathcal{U}}_2, \overset{*}{\mathcal{U}}_3$	Composantes directes des projections des vitesses dans le cas de projections variant sinusoïdalement (sans étoile pour l'aérodyne; avec étoile pour l'air).
c_{ik}	Termes de la matrice de fonctionnement air-aérodyne.
β_{ik}	Terme de la matrice inverse de $[c]$.
K_{lm}	Terme de la matrice additive (pilote automatique).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Karman Th. — The fondamentals of the statistical theory of turbulence. *J. Aeronautical Sc.*, 1936-1937, **4**, 132.

[2] Kampé de Fériet J. — Le tenseur spectral de la turbulence homogène non isotrope dans un fluide incompressible. *C. R. Acad. Sc.*, 1948, **227**, 760.

[3] Kampé de Fériet J. — Spectral tensor of a homogeneous turbulence. Dedication symposium, Naval Ordonance Laboratory, Washington, July 1949; Symposium on turbulence, *N. O. R. L.*, n° 1.136, p. 1-31.

[4] Kampé de Fériet J. — Sur l'analyse spectrale d'une fonction stationnaire en moyenne. Actes Colloque international de Mécanique des Fluides, Poitiers, mai 1950. *Publ. Sc. et Techn. Min. de l'Air*, **251**, p. 317-335.

[5] Mazelsky. — A study of the application of power spectrum tensors, and generalised harmonic analysis of gust loads on airplanes. *N. A. C. A.*, n° 2.853.

[6] Frager L. — Stabilité et stabilisation des aérodynes. *O. N. E. R. A.*, 1.285 P, n° 8.

[7] Frager L. — Stabilité et stabilisation des aérodynes. Association Technique Maritime et Aéronautique, Session de 1951.

EXPOSÉS ET MISES AU POINT BIBLIOGRAPHIQUES

THÉORIE DE L'ENREGISTREMENT D'ÉVÉNEMENTS ALÉATOIRES

Par Marc FEIX,
Laboratoire de Physique atomique et moléculaire (Collège de France), Fort d'Issy-les-Moulineaux.

Sommaire. — L'auteur montre que l'emploi des accélérateurs pulsés conduit à faire fonctionner les compteurs d'impulsion à des cadences élevées pendant des temps très brefs. L'inertie du compteur jointe au caractère aléatoire des dates d'arrivées des impulsions peut perturber gravement le résultat du comptage. Avec certaines hypothèses on indique les relations permettant de connaître le nombre d'arrivées en fonction du nombre d'enregistrements (en régime continu et en régime pulsé), ainsi que les taux de comptage maxima pour une correction fixée, dans les deux cas d'un comptage simple et d'un comptage en coïncidence. Pour ce dernier le régime pulsé conduit à réduire fortement la cadence de comptage.

Dans les montages de Physique nucléaire ou atomique les circuits se terminant par des compteurs d'impulsion sont très fréquemment employés (compteurs de Geiger, cristal suivi d'un photomultiplicateur, etc.). Nous assistons également pour l'obtention de particules de grande énergie au développement de puissants accélérateurs parmi lesquels beaucoup ont un fonctionnement pulsé (tels les bétatrons, les synchro-cyclotrons, les accélérateurs linéaires, etc.). La fraction de temps utile de ces appareils (qui est rappelons-le, donnée par le produit de la durée de l'impulsion par la fréquence de récurrence) peut varier dans de très larges limites (de 1/2 à 1/20 000 pour fixer les idées). Il s'ensuit que le dispositif doit compter en un temps parfois très bref, un grand nombre de particules puis n'enregistrer plus rien. Étant donné le caractère aléatoire des arrivées des impulsions et le pouvoir de résolution fini des dispositifs de comptage la valeur qu'il faut attribuer au même comptage selon qu'il s'agit d'un régime continu ou d'un régime pulsé est très différente. Intuitivement nous voyons bien que le risque d'erreur est d'autant plus grand que la fraction de temps utile est plus petite.

Aussi nous a-t-il semblé intéressant de rassembler dans un article de mise au point la théorie du comptage des événements aléatoires, spécialement en régime pulsé.

Nous avons divisé cet article en trois parties.

1. Un bref rappel des propriétés des fonctions caractérisant les événements se produisant à des instants aléatoires.

2. La théorie du comptage simple d'événements aléatoires.

3. Une théorie du comptage en coïncidence limité à 2.

Dans ce travail de mise au point nous avons utilisé fréquemment le livre du Professeur Fortet [14].

1. Lois d'arrivée des événements à enregistrer. — *a. La loi de Poisson.* — Soit une impulsion commençant à l'instant zéro, finissant à l'instant t (t sera très grand dans le cas d'un fonctionnement continu; dans le cas d'un régime pulsé t est la durée de l'impulsion donnée par l'accélérateur). Si alors nous supposons l'impulsion rectangulaire (*fig.* 1) on peut prendre



Fig. 1.

comme hypothèse que les arrivées des événements à enregistrer s'effectuent selon un processus poissonien, c'est-à-dire :

a. les arrivées sont indépendantes entre elles;

b. l'arrivée de chaque événement est équiprobable dans (o-t);

c. un tel processus est défini par la cadence d'arrivées

$$a = \text{espérance mathématique de } \frac{N(t)}{t} = \text{e. m.} \frac{N(t)}{t},$$

$N(t)$, nombre d'événements arrivés dans (o-t).

Nous laisserons de côté la discussion de la validité du processus poissonien. Dans certains cas particuliers l'on peut également supposer une forme non rectangulaire à l'impulsion, *voir* [9], [24].

L'on démontre aisément qu'un tel processus suit la loi de Poisson (d'où son nom). Rappelons les résultats :

La probabilité d'avoir r arrivées dans (o-t) est, en posant $at = m$:

$$P_r = e^{-m} \frac{m^r}{r!}; \tag{1}$$

La probabilité d'avoir au plus r arrivées dans (o-t) est

$$\underset{N(t) \leq r}{P} = e^{-m} S_r(m) = 1 - \frac{(m, r)!}{r!}. \tag{2}$$

Nous rappelons que (m, r) ! est la factorielle incomplète dont la définition est

$$(m, r)! = \int_0^m e^{-t} t^r \, dt,$$

quant à $S_r(m)$, c'est le développement de e^m limité au $r + 1$ premiers termes :

$$S_r(m) = 1 + \frac{m}{1!} + \frac{m^2}{2!} + \ldots + \frac{m^r}{r!}.$$

On a entre $S_r(x)$ et (x, r) ! la relation suivante :

$$\frac{(x, r)!}{r!} = 1 - e^{-x} S_r(x). \tag{3}$$

Enfin donnons la loi de répartition de la date d'arrivée u du $(r + 1)^{\text{ième}}$ événement. Si l'on pose $x = au$ la probabilité pour que x soit compris entre x et $x + dx$ $\left(\text{c'est-à-dire } u \text{ entre } \frac{x}{a} \text{ et } \frac{x}{a} + \frac{dx}{a}\right)$

est
$$e^{-x} \frac{x^r}{r!} dx. \tag{4}$$

L'é. m. de $N(t)$ nombre d'événements arrivés dans (o-t) est

$$\sum_{r=0}^{\infty} r P_r = at = m,$$

comme il fallait s'y attendre.

Enfin l'écart moyen quadratique centré est défini par

$$\sigma = \sqrt{\sum_{r=0}^{\infty} (r - m)^2 P_r} = \sqrt{m}.$$

b. Les fluctuations. — Un compteur est un appareil qui mis en marche au temps zéro et arrêté au temps t nous donnera $N(t)$ le nombre d'événements arrivés dans l'intervalle.

La grandeur physique intéressante est non $N(t)$ mais a, le compteur même parfait nous donnera un nombre qui se rapprochera d'autant plus de a que le temps de comptage sera plus grand. C'est le phénomène des fluctuations, lorsque le comptage porte sur un nombre assez grand (disons plus grand que 100) la loi de Poisson tend vers la loi de Laplace-Gauss et l'on dit souvent que les fluctuations relatives sont en $\frac{1}{\sqrt{N}}$.

Rappelons exactement la signification de cette loi.

Soit m l'e. m. du nombre d'événements arrivés, si m est grand et α petit devant m, la probabilité que le nombre d'arrivées soit compris entre $m - \alpha$ et $m + \alpha$ est $\theta\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2m}}\right)$, $\theta(x)$ fonction erreur vaut

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} \, dt.$$

En particulier on trace souvent autour d'un point aléatoire m le segment joignant le point $m - \xi\sqrt{m}$ à $m + \xi\sqrt{m}$, ξ étant choisi tel que la probabilité que $N(t)$ soit sur le segment soit $\frac{1}{2}$.

Il faut alors prendre $\xi = \sqrt{2}\mu$ avec $\theta(\mu) = \frac{1}{2}$.

Soit $\xi = 0{,}67449$, l'écart $\pm\xi\sqrt{m}$ s'appelle alors l'écart médian.

On considère souvent également l'écart $\pm\sqrt{m}$, la probabilité qu'il soit dépassé est alors 0,3173.

Donc en comptant un nombre assez grand de coups on peut s'arranger pour que l'erreur commise en assimilant $\frac{N(t)}{t}$ à a soit aussi petite que l'on veut : plus exactement la probabilité que l'erreur relative soit $< \varepsilon$ (ε aussi petit soit-il) peut être rendue arbitrairement petite $\left(\text{et décroît comme } \frac{1}{\sqrt{N}}\right)$.

c. Les compteurs réels. — Malheureusement ceci suppose un compteur parfait c'est-à-dire enregistrant toutes les arrivées. Or un système de comptage est caractérisé par un pouvoir de résolution. Ce pouvoir est lié aux constantes de temps des systèmes de détection : étincelles des compteurs à étincelle, durée de scintillation, bande passante de l'électronique, etc. Si deux événements se produisent trop près l'un de l'autre le compteur peut « rater » le deuxième.

Deux schémas simples ont été proposés pour le fonctionnement d'un compteur.

1° Un événement étant enregistré le compteur est bloqué pendant un temps τ. Tout événement arrivant pendant ce temps n'est pas enregistré mais ne déclenche pas un nouveau blocage (*fig.* 2).

2° Le compteur est bloqué pendant le temps τ et tout événement arrivant alors n'est pas enre-

gistré et déclenche un nouveau blocage. Pour qu'un événement ait été enregistré il faut qu'aucune arrivée n'ait eu lieu pendant le temps τ le précédent. Le deuxième cas, nous le voyons, conduit à davantage d'omissions d'enregistrement que le premier (*fig.* 3).

2. Comptage des particules [13], [14]. — *a. Théorie générale.* — Dans ces conditions quel est le nombre de particules enregistrées ou plus exactement quelle est l'e. m. de ce nombre ? Avec un système où $\tau = 0$, cette e. m. vaudrait at, a étant la fréquence d'arrivée des impulsions et t le temps du comptage commencé à l'époque zéro, terminé à l'époque t.

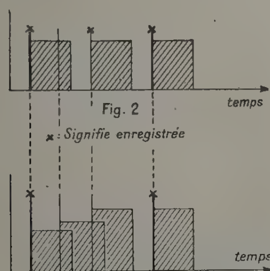


Fig. 2 et 3.

Soit T_0 la date d'arrivée, de la première impulsion enregistrée; T_1 l'intervalle séparant la première impulsion enregistrée de la deuxième; T_{k-1} l'intervalle entre les $(k-1)^{\text{ième}}$ et $k^{\text{ième}}$ impulsions enregistrées; la date d'arrivée de la $k^{\text{ième}}$ impulsion enregistrée est (*fig.* 4)

$$S_k = T_0 + T_1 + \ldots + T_{k-1}.$$

Les T_k sont des variables aléatoires ayant toutes même répartition $\varphi(u)$, c'est-à-dire la probabilité que T_k soit compris dans $(u,\ u + du)$ est $\varphi(u)\,du$

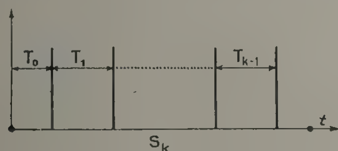


Fig. 4.

sauf pour T_0 (car alors nous sommes sûrs que le compteur n'est pas bloqué); lorsque nous envisagerons le fonctionnement en régime pulsé nous supposerons toujours que le temps d'arrêt est suffisant pour que le compteur soit débloqué à chaque début de période de travail de l'appareil.

T_0 lui, a pour loi de répartition

$$a\,e^{-au}\,du = f(u)\,du.$$

Soient :

f_k la densité de répartition de S_k, c'est-à-dire $f_k(u)\,du$ est la probabilité que S_k soit dans l'intervalle $(u,\ u + du)$.

$F_k(t)$ la probabilité que k impulsions au moins soient enregistrées dans (o-t), c'est-à-dire que $S_k < t$,

$$F_k(t) = \int_0^t f_k(u)\,du.$$

Nous pouvons écrire :

$$\left.\begin{aligned} F_k(t) &= \int_0^t f_{k-1}(u)\,du \int_0^{t-u} \varphi(v)\,dv \\ &\qquad \text{valable pour } k > 1, \\ F_1(t) &= \int_0^t f(u)\,du. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Pour que $N(t) = k$ il faut $S_k < t$ et $S_{k+1} > t$. Soit p_k une telle probabilité :

$$\left.\begin{aligned} P_k &= \int_0^t f_k(u)\,du \int_{t-u}^{\infty} \varphi(v)\,dv \\ &= \int_0^t f_k(u)\,du \left[1 - \int_0^{t-u} \varphi(v)\,dv\right], \\ P_k &= F_k(t) - F_{k+1}(t); \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

p_k = probabilité d'avoir au moins k enregistrements moins probabilité d'avoir au moins $k + 1$ enregistrements.

Si $e(t)$ est l'e. m. du nombre d'enregistrements :

$$e(t) = \sum_0^{\infty} k p_k = \sum_1^{\infty} F_k(t). \tag{7}$$

Pour pouvoir continuer le calcul nous passons aux équations régissant les transformées de Laplace (1). (5) s'écrit alors (théorème de Borel)

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{F}_k(t) = \int_0^t f_{k-1}(u)\,\Phi(t-u)\,du, \\ &\text{avec}\quad \Phi(u) = \int_0^u \varphi(u)\,du \quad \left\{\begin{aligned} f_k(p) &\sqsubset f_k(t), \\ F_k(p) &\sqsubset F_k(t), \\ \varphi(p) &\sqsubset \varphi(t), \\ e(p) &\sqsubset e(t), \\ f(p) &\sqsubset f(t); \end{aligned}\right. \\ &F_k(p) = f_{k-1}(p)\,\frac{\varphi(p)}{p} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

ou encore

$$F_k(p) = F_{k-1}(p)\,\varphi(p)$$

et

$$\sum_2^{\infty} F_k(p) = e(p) - F_1(p)$$

$$= \varphi(p) \sum_2^{\infty} F_{k-1}(p) = \varphi(p)\,e(p),$$

(1) Rappelons que $f(p) \sqsubset f(t)$ si $f(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt}\, f(t)\,dt$.

or

$$F_1(p) = \frac{f(p)}{p},$$

d'où

$$e(p) = \frac{f(p)}{p[1 - \varphi(p)]} \tag{9}$$

Une telle relation en repassant à la variable t peut s'écrire encore

$$e(t) = \int_0^t f(t)\,dt + \int_0^t e(t-u)\,\varphi(u)\,du. \tag{10}$$

b. Compteur parfait. — Dans un tel compteur $\tau = 0$,

$$f(u) = a\,e^{-au}, \qquad \varphi(u) = f(u)$$

et par conséquent

$$\varphi(p) = f(p) = \frac{a}{p+a}.$$

Le cas n'est pas intéressant (nous devons trouver at) :

$$e(p) = \frac{a(p+a)}{p(p+a)p} = \frac{a}{p^2} \sqsubset at.$$

c. Compteur du type 1 (*à bloquage simple*). — C'est en particulier le cas des compteurs de Geiger.

Dans ce cas $\varphi(u)$ est de la forme

$$a\,e^{-a(u-\tau)}\{\Upsilon a(u-\tau)\},$$

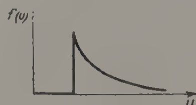


Fig. 5.

$\Upsilon(x)$ est la fonction-unité d'Heaviside :

$$\Upsilon(x) = 1 \quad \text{si} \quad x > 0,$$
$$\qquad\quad 0 \quad \text{si} \quad x < 0,$$

on a alors

$$\varphi(p) = \frac{a}{p+a}\,e^{-p\tau},$$

$f(t)$ n'a pas changé et

$$f(p) = \frac{a}{p+a},$$

donc

$$e(p) = \frac{a}{(p+a)p}\,\frac{(p+a)}{p+a-a\,e^{-p\tau}}$$
$$= \frac{a}{p(p+a-a\,e^{-p\tau})}, \tag{11}$$

on écrit

$$e(p) = \frac{a}{p^2}\,\frac{1}{1 + \dfrac{a(1-e^{-p\tau})}{p}}$$
$$= \frac{a}{p^2}\left[1 - \frac{a(1-e^{-p\tau})}{p} + \frac{a^2}{p^2}(1-e^{-p\tau})^2 + \ldots + (-1)^n\frac{a^n}{p^n}(1-e^{-p\tau})^n\right],$$

Ou en regroupant les termes d'une autre façon

$$\frac{a}{p^2}\Bigg[1 - \frac{a}{p} + \frac{a^2}{p^2} + \ldots + (-1)^n\frac{a^n}{p^n} + \ldots$$
$$+ e^{-p\tau}\left(\frac{a}{p} - \frac{2a^2}{p^2} + 3\frac{a^3}{p^3} + \ldots\right)$$
$$+ e^{-2p\tau}\left(\frac{a^2}{p^2} - C_3^2\frac{a^3}{p^3} + C_4^2\frac{a^4}{p^4} + \ldots\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ e^{-hp\tau}\left(\frac{a^h}{p^h} - C_{h+1}^h\frac{a^{h+1}}{p^{h+1}} + C_{h+2}^h\frac{a^{h+2}}{p^{h+2}} + \ldots\right)\Bigg].$$

On sait que

$$\frac{a}{p^2}\,e^{-ph\tau}\,\frac{a^h}{p^h} \sqsubset \frac{a(t-h\tau)^{h+1}}{(h+1)!}\,\Upsilon a(t-h\tau).$$

Le terme général

$$e^{-ph\tau}\left(\frac{a^h}{p^h} - C_{h+1}^h\frac{a^{h+1}}{p^{h+1}} + C_{h+2}^h\frac{a^{h+2}}{p^{h+2}} + \ldots\right)$$

est la transformée de Laplace de

$$[1 - e^{-a(t-h\tau)}S_h a(t-h\tau)]\,[\Upsilon a(t-h\tau)], \tag{12}$$

en posant

$$\frac{(h,x)!}{h!} = \psi_h(x),$$

il vient

$$e(t) = \sum_{h=0}^{\text{P.E.}\frac{t}{\tau}} \psi_h a(t-h\tau), \tag{13}$$

P.E. $\frac{t}{\tau}$ signifie partie entière de $\frac{t}{\tau}$ c'est l'entier immédiatement inférieur à ce dernier nombre. Nous allons modifier $e(t)$ en posant

$$at = m \qquad \text{et} \qquad \frac{\tau}{t} = \xi,$$

$$e(m,\xi) = \sum_{h=0}^{\text{P.E.}\frac{1}{\xi}} \psi_h m(1-h\xi). \tag{14}$$

Nous remarquons :

1° Si $\xi > 1$ c'est-à-dire si $\tau > t$,

$$e(m) = \psi_0(m) = 1 - e^{-m}, \qquad e(m) = 1 - e^{-m}. \tag{15}$$

Donc dès que $\tau > t$ la valeur de $\frac{\tau}{t}$ n'intervient pas, ce qui était à prévoir : seul compte la première impulsion arrivant, aucune autre ne pouvant être détectée.

2° Si $\xi < 1$ $e(m)$ croît de zéro à $\left(\text{P.E.}\,\frac{1}{\xi}\right) + 1$ quand m croît de zéro à l'infini.

Nous allons avant de discuter ces courbes, traiter le cas des compteurs du type 2.

d. Compteur du type 2 (*accumulation des bloquages*). — Il faut chercher $\varphi(u)$, fonction de répartition de l'intervalle de temps séparant deux enregistrements.

Dans ce cas un enregistrement ayant eu lieu à l'instant zéro quelle est la probabilité pour que le suivant ait lieu à l'instant u. Il faut pour cela trois conditions :

1° Pas d'arrivée dans l'intervalle $(u - \tau, u)$ probabilité $e^{-a\tau}$.

2° Une arrivée dans l'intervalle $(u, u + du)$ probabilité $a\,du$.

3° Pas d'enregistrement dans l'intervalle $(0, u - \tau)$ ou $(\tau, u - \tau)$ pour que cet enregistrement soit le premier.

Posons $v = u - \tau$ $du = dv$ si $\psi(v)$ est la loi de répartition du premier enregistrement, on a

$$\psi(v)\,dv = e^{-a\tau} a\,dv \left[1 - \int_0^{v-\tau} \psi(v)\,dv\right] [\Upsilon(av)], \quad (16)$$

où en passant aux transformées de Laplace : $\psi(v) \sqsupset \varphi(p)$,

$$\psi(p) = a\,e^{-a\tau}\left[\frac{1}{p} - \frac{\psi(p)}{p} e^{-p\tau}\right],$$

nous en tirons

$$\psi(p) = \frac{a\,e^{-a\tau}}{p + a\,e^{-(a+p)\tau}}. \quad (17)$$

Si l'on revient à $\varphi(u)$ et à sa transformée de Laplace :

$$\varphi(p) = \frac{a\,e^{-(a+p)\tau}}{p + a\,e^{-(a+p)\tau}}. \quad (18)$$

En développant $\varphi(p)$:

$$\frac{a\,e^{-(a+p)\tau}}{p + a\,e^{-(a+p)\tau}} = \frac{a\,e^{-a\tau}\,e^{-p\tau}}{p}\left[1 - \frac{a}{p} e^{-(a+p)\tau} + \frac{a^2}{p^2} e^{-2(a+p)\tau} + \ldots\right]$$
$$= \frac{a\,e^{-a\tau}\,e^{-p\tau}}{p}\left[1 - a\,e^{-a\tau}\frac{e^{-p\tau}}{p} + a^2 e^{-2a\tau}\frac{e^{-2p\tau}}{p} + \ldots\right].$$

En repassant à la variable u,

$$\varphi(u) = a\,e^{-a\tau}\{[\Upsilon a(u-\tau)] - a\,e^{-a\tau}(u - 2\tau) \times [\Upsilon a(u - 2\tau)] + a^2 e^{-2a\tau}(u - 3\tau) \times [\Upsilon a(u - 3\tau)] + \ldots\}.$$

En posant $ae^{-a\tau} = \mu$ il vient

$$\varphi(u) = \sum_{1}^{\text{P. E.}\frac{u}{\tau}} (-1)^{n-1} \mu^n \frac{(u - n\tau)^{n-1}}{(n-1)!}[\Upsilon a(u - n\tau)]. \quad (19)$$

Nous n'insisterons pas sur cette dernière fonction et nous allons passer au calcul de $e(p)$. Dans ce cas :

$$f(p) = \frac{a}{p + a}; \qquad \varphi(p) = \frac{a\,e^{-(a+p)\tau}}{p + a\,e^{-(a+p)\tau}};$$

$$1 - \varphi(p) = \frac{p}{p + a\,e^{-(a+p)\tau}}.$$

$$e(p) = \frac{a}{p^2(p+a)}[p + a\,e^{-(a+p)\tau}]. \quad (20)$$

En décomposant la fraction rationnelle

$$e(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+a} + a^2 e^{-a\tau} e^{-p\tau}\left[\frac{1}{ap^2} - \frac{1}{a^2 p} + \frac{1}{a^2(p+a)}\right],$$

d'où $e(t)$:

$$e(t) = 1 - e^{-a\tau} + e^{-a\tau}[a(t-\tau) - 1 + e^{-a(t-\tau)}] \times [\Upsilon a(t - \tau)]. \quad (21)$$

On distingue encore deux cas :

$$\left.\begin{array}{ll} 1^\circ & \tau > t : \quad e(t) = 1 - e^{-at}; \\ 2^\circ & \tau < t : \quad e(t) = at\,e^{-a\tau} + 1 - e^{-a\tau}(a\tau + 1). \end{array}\right\} \quad (22)$$

On va encore poser

$$at = m, \qquad \frac{\tau}{t} = \xi \qquad \text{soit} \quad a\tau = m\xi;$$

les formules deviennent

$$\left.\begin{array}{ll} 1^\circ & \xi > 1 : \quad e(m, \xi) = 1 - e^{-m}; \\ 2^\circ & \xi < 1 : \quad e(m, \xi) = m\,e^{-m\xi} + 1 - e^{-m\xi}(1 + m\xi). \end{array}\right\} \quad (23)$$

Nous allons maintenant discuter les résultats obtenus dans les deux cas c et d.

Le plus simple est de tracer $e(m, \xi)$ en fonction de m (*fig.* 6 pour c; *fig.* 7 pour d).

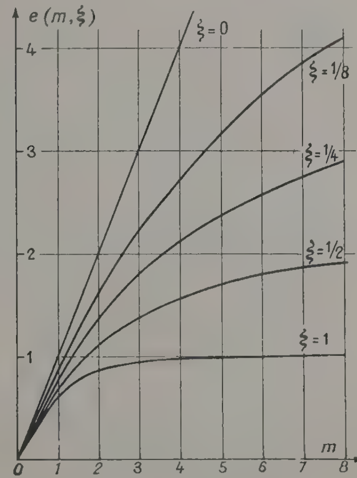


Fig. 6. — Blocage simple.

Nous observons que :

— pour $\xi > 1$ nous avons la même courbe $1 - e^{-m}$ indépendante de ξ; ce cas est important (cas des impulsions de courtes durées pour la plupart des cristaux, cas des compteurs de Geiger pour la plupart des impulsions) nous remarquons que si m est petit la perte relative est

$$p = \frac{m}{2}, \quad (24)$$

la cadence maximum de comptage C que l'on peut se permettre si l'on veut limiter la perte p est donc (f étant la fréquence de récurrence)

$$C = 2pf \quad \text{pour} \quad f = 100 \text{ c/s}, \tag{25}$$

si l'on veut limiter la perte à 1 pour 100 il ne faut donc pas dépasser une cadence de 2 coups/s ou encore 120 coups/mn ;

— pour $\xi < 1$, les deux cas présentent une assez grande différence : dans le premier cas on tend vers une limite — dans le deuxième cas si la cadence

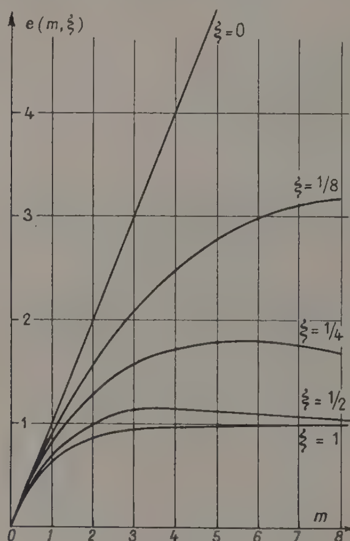


Fig. 7. — Accumulation des blocages.

d'arrivée augmente trop le nombre d'enregistrements décroît après être passé par un maximum — le compteur étant paralysé après la première impulsion enregistrée.

Nous allons étudier la perte relative pour un m petit. En développant en série limitée :

1° $$(14) \to e(m) = m - \frac{m^2}{2}(2\xi - \xi^2).$$

soit une perte relative $\frac{m}{2}(2\xi - \xi^2)$;

2° $$(23) \to e(m) = m - \frac{m^2}{2}(2\xi - \xi^2)$$

soit le même développement limité dans les deux cas et, par conséquent, la même perte relative :

$$p = \frac{m}{2}(2\xi - \xi^2). \tag{26}$$

La cadence maximum autorisée pour limiter la perte à p est alors

$$C = \frac{2pf}{2\xi - \xi^2}, \tag{27}$$

si en plus ξ est petit devant 1 (27) prend la forme très simple

$$C = \frac{2pf}{2\xi} = \frac{pft}{\tau}.$$

Comme $ft = \theta$,

$$C = \frac{p\theta}{\tau}, \qquad \xi \ll 1, \tag{28}$$

si par exemple $t = 1\,\mu s$, $\tau = 10^{-7}$ s et $f = 100$ c/s si $p = 1$ pour 100.

La cadence permise atteint alors 10 coups/s, soit 600 coups/mn.

Donnons l'expression des pertes pour un régime continu, il faut voir ce que deviennent $e(t)$ pour $t \to \infty$.

Dans le cas 1 (blocage simple) l'expression (13) est malaisée à étudier. Il est beaucoup plus simple de revenir à la transformée de Laplace et à la développer au voisinage de $p = 0$:

$$e(p) \sim \frac{1}{1 + a\tau} \frac{a}{p^2} \qquad \text{donc} \quad e(t) \sim \frac{at}{1 + a\tau}.$$

Dans le cas 2 (accumulation des blocages) (22) donne tout de suite

$$e(t) \sim at\, e^{-a\tau}$$

si l'on veut que la perte p soit faible, les cadences limites auxquelles on arrive sont les mêmes dans les deux cas :

$$a\tau \ll 1 \begin{cases} p = a\tau. & (29) \\ C = \dfrac{p}{\tau}. & (30) \end{cases}$$

Pour un compteur présentant un temps mort de 10^{-7} s et si l'on veut limiter la perte à 1 pour 100, la cadence de comptage peut encore atteindre 10^5 coups/s. On trouve le rapport θ entre la cadence permise en régime continu et celle en régime pulsé.

Dans certains cas ces pertes peuvent sembler petites en comparaison des fluctuations mais il ne faut pas oublier que ces dernières décroissent comme $\frac{1}{\sqrt{N}}$. Si la perte est de 1 pour 100 on pourra la négliger dans un comptage de 100 coups, mais pas dans un comptage de 10 000 coups. Tout cela est simple affaire de bon sens, *voir* [9], [25], [26].

3. **Comptage en coïncidence.** — Pour l'étude de beaucoup de phénomènes on a recours en Physique au montage en coïncidence. Durant la durée de l'impulsion de l'accélérateur des phénomènes se présentent sur deux voies mais un coup n'est enregistré que si les deux phénomènes se produisent simultanément. Bien évidemment le montage est soumis à des inerties. On peut schématiser ces inerties par un temps τ. Une impulsion arrivant à l'instant t sur un circuit ouvre l'accès au comptage pour les impulsions du deuxième circuit entre les instant t et $t + \tau$. Si dans ces instants se présentent une ou plusieurs impulsions sur la voie 2 elles sont enregistrées. Le même rôle est joué vis-à-vis du circuit 1 par le circuit 2.

La figure 8 ci-contre explique le comportement du système. Si deux impulsions sont simultanées on enregistre un coup. Mais même si les impulsions ne sont pas simultanées il peut y avoir enregistrement d'une fausse coïncidence. Contrairement au cas du comptage simple où il y avait perte d'impulsions il y a maintenant des impulsions qui sont comptées en trop.

De même que pour le comptage simple le fonctionnement en régime pulsé rend le comptage en coïncidence plus délicat.

Nous allons étudier dans le cadre du schéma simplifié donné ci-dessus le bruit de fond.

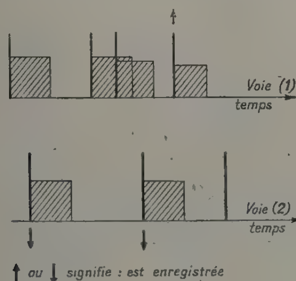


Fig. 8.

Dans une impulsion de durée t, en moyenne m impulsions arrivent sur la voie 1, n sur la voie 2, aucune n'étant simultanée dans les deux canaux. Quelle est en moyenne le nombre de coups comptés du fait de τ ? (*fig.* 9 et 10).

Nous proposons le calcul suivant. Soit $e(x, \xi)$ le nombre moyen d'enregistrement lorsque x est le nombre moyen d'arrivées en comptage simple dans

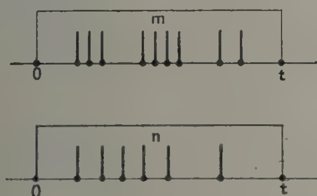


Fig. 9 et 10.

l'hypothèse de l'accumulation des bloquages $\left(\xi = \frac{\tau}{t}\right)$.

Le pourcentage des pertes est donc $\frac{x - e(x, \xi)}{x}$, c'est le pourcentage du temps pendant lequel le circuit 1 n'enregistre pas d'arrivée. Dans le montage en coïncidence ce sera le pourcentage du temps pendant lequel le circuit 2 sera débloqué. D'où le passage de $n \frac{m - e(m, \xi)}{m}$ impulsions et en intervertissant les rôles des circuits 1 et 2 de $m \frac{n - e(n, \xi)}{n}$ impulsions, soit un nombre de fausses coïncidences

$$c = n\left[1 - \frac{e(m, \xi)}{m}\right] + m\left[1 - \frac{e(n, \xi)}{n}\right]. \qquad (31)$$

Redonnons l'expression de

$$e(x, \xi) = x\,e^{-x\xi} + 1 - e^{-x\xi}(1 + x\xi).$$

Un cas particulièrement intéressant est celui où $m\xi$ et $n\xi$ sont petits en développant $e(x, \xi) \sim x(1 - x\xi)$,

$$1 - \frac{e(x, \xi)}{x} = x\xi,$$

on obtient

$$c = 2mn\xi, \qquad (32)$$

si M et N sont les cadences moyennes de comptage des circuits 1 et 2, si C est la cadence moyenne de comptage en coïncidence f et θ ayant la même signification que précédemment, on a

$$M = fm, \qquad N = fn, \qquad C = fc = 2MN\frac{\tau}{ft}$$

ou encore

$$C = 2MN\frac{\tau}{\theta}, \qquad m\xi \text{ et } n\xi \ll 1. \qquad (33)$$

Encore une fois le facteur θ est placé au mauvais endroit.

Étudions également le cas où $\tau > t$,

$$e(x, \xi) = 1 - e^{-x}$$

si m et n sont petits devant 1 :

$$c \sim mn \qquad (34)$$

et

$$C = \frac{MN}{f} \qquad (m \text{ et } n \ll 1,\ \tau > t). \qquad (35)$$

Supposons maintenant qu'il y ait des impulsions simultanées sur 1 et 2 :

sur 1 arrivent m impulsions dont αm en vraies coïncidences ;

sur 2 arrivent n impulsions dont βn en vraies coïncidences ;

bien entendu

$$\alpha m = \beta n.$$

On étudie le cas où $m\xi$ et $n\xi \ll 1$

$$\text{et} \quad \xi \ll 1.$$

Le bruit de fond est formé par les fausses coïncidences entre les m impulsions de 1 et les n impulsions de 2 qui ne sont pas en coïncidence.

Parmi les $n(1 - \beta)$ impulsions de 2 qui ne devraient pas passer :

$$n(1 - \beta)m\xi \text{ passent.}$$

De même parmi les $m(1 - \alpha)$ impulsions de 1

$$m(1 - \alpha)n\xi \text{ passent.}$$

Soit un « bruit » (nombre de fausses coïncidences) de

$$2mn\xi\left(1 - \frac{\alpha + \beta}{2}\right).$$

Le « signal » est $\alpha m = \beta n$ que par raison de symétrie nous écrivons

$$\sqrt{\alpha\beta}\sqrt{mn}.$$

Le rapport $\frac{\text{signal}}{\text{bruit}}$ est

$$\frac{S}{B} = \frac{\sqrt{\alpha\beta}\sqrt{mn}}{2\frac{\tau}{t}\left(1 - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)mn}.$$

En posant comme précédemment :

$$M = fm, \qquad N = fn, \qquad \theta = ft,$$

il vient

$$\frac{S}{B} = \frac{1}{2\tau}\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{1 - \frac{\alpha+\beta}{2}}\frac{\theta}{\sqrt{MN}}. \qquad (36)$$

Pour le régime continu, $\theta = 1$.

Nous voyons que $\frac{S}{B}$ dépend de trois termes :

— le premier, $\frac{1}{2\tau}$ traduit le pouvoir de résolution du compteur;

— le deuxième, $\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{1 - \frac{\alpha+\beta}{2}}$ est fonction de la définition du phénomène. Si l'on compte par exemple par coïncidence un nombre de particules dont une grandeur physique g est comprise entre g et $g + \Delta g$, on risque d'avoir α (ou β) proportionnel à Δg;

— le troisième dépend de la cadence de comptage.

Si l'on exprime la cadence maximum compatible avec un rapport $\frac{S}{B}$ donné, on a

$$C = f\sqrt{\alpha\beta}\sqrt{mn} = \sqrt{\alpha\beta}\sqrt{MN}$$

et

$$C = \frac{1}{2\tau}\frac{\alpha\beta}{1 - \frac{\alpha+\beta}{2}}\frac{\theta}{\frac{S}{B}}; \qquad (37)$$

pour le régime continu il suffit de faire $\theta = 1$, si

$$\tau = 10^{-8}\ \text{s}, \qquad \theta = 10^{-4}, \qquad \alpha = \beta = 10^{-2} \quad \text{et} \quad \frac{S}{B} = 50,$$

nous obtenons

$$C = 10^{-2}\ \text{coups/s}, \quad \text{soit } 0{,}6\ \text{coup/mn}.$$

Enfin donnons le calcul dans le cas où $\tau > t$ et où m et n sont petits devant 1.

Dans ce cas le bruit vaut

$$mn\left(1 - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

et

$$\frac{S}{B} = \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\left(1 - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\frac{1}{\sqrt{mn}}$$

ou

$$\frac{S}{B} = \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{1 - \frac{\alpha+\beta}{2}}\frac{f}{\sqrt{MN}} \qquad (38)$$

ou encore en exprimant C en fonction de α, β et $\frac{S}{B}$:

$$C = \frac{\alpha\beta}{1 - \frac{\alpha+\beta}{2}}\frac{f}{\frac{S}{B}} \qquad (39)$$

si

$$\alpha = \beta = 10^{-1} \quad \frac{S}{B} = 50 \quad \text{et} \quad f = 100\ \text{c/s}.$$

La cadence permise est alors 1,3 coups/mn.

Les cas intermédiaires peuvent se traiter avec les formules générales donnant $e(m, \xi)$; $e(n, \xi)$, bruit et signal sont alors :

$$\left.\begin{aligned} B &= n(1-\beta)\left[1 - \frac{e(m,\xi)}{m}\right] \\ &\quad + m(1-\alpha)\left[1 - \frac{e(n,\xi)}{n}\right] \\ S &= \sqrt{\alpha\beta}\sqrt{mn}; \end{aligned}\right\} \qquad (40)$$

les résultats restent identiques. Il faut travailler avec des α et β les plus élevés possibles (compatibles avec la précision recherchée sur le phénomène) et la cadence utile est toujours proportionnelle à θ.

En comptage simple les cadences permises sont encore assez élevées. En comptage en coïncidence les cadences peuvent devenir faibles. D'où l'intérêt d'avoir un θ assez grand.

La question des corrections peut se poser. Il semble tout d'abord qu'il soit difficile de corriger des perturbations très importantes par exemple de l'ordre de 50 pour 100 des impulsions arrivant. Les compteurs réels ne suivent en effet, qu'imparfaitement les schémas simples que nous avons indiqués. Il peut être dans certains cas intéressant de se mettre systématiquement dans le cas $\tau > t$. En effet, la loi de $e(m)$ devient alors vraie quelle que soit la forme de l'impulsion, m étant le nombre moyen d'arrivées par impulsions. Dans ce cas il suffit de s'assurer qu'il ne peut y avoir enregistrement de deux impulsions, dans le cas du comptage simple et dans le cas du comptage en coïncidence que, si une impulsion arrive sur une voie, toute impulsion arrivant postérieurement sur l'autre voie est enregistrée. On peut alors effectuer des corrections selon les formules indiquées.

Il reste qu'en tout état de cause le fonctionnement en régime pulsé est d'autant plus défavorable au point de vue comptage que θ est plus petit.

Pour d'autres problèmes (problème d'un bruit de fond continu, cosmique par exemple) il peut être intéressant d'avoir un θ petit. On bloque alors le détecteur pendant le temps d'arrêt de l'accélérateur.

Il n'est pas indifférent pour un θ donné de prendre t plus ou moins grand. Cela dépend des applications et des remarques ci-dessus concernant τ et t et également des possibilités de fabrication. Pour une application de mesure d'énergie de neutron par la méthode du temps de vol par exemple il faut t le plus petit possible.

Nous donnons ci-dessous une bibliographie sur la question, le nombre de publications portant sur ce sujet est assez restreint.

Au fur et à mesure de l'exposé nous avons signalé les articles traitant plus spécialement un point précis.

Indiquons pour terminer :

[13], [14], [15], [20], [25] et [26] traitent la question d'une manière théorique et générale;

[1], [4], [9], [11], [21], [22], [23] et [28] traitent du comptage simple, le plus souvent en régime continu;

les articles sur le comptage en coïncidence ont été signalés;

[12] traite spécialement le régime pulsé.

La question d'un système comprenant plusieurs temps morts différents a été abordée dans [1], [8] et [21], l'influence de la loi de distribution de τ dans [9] et [24]; on trouvera des données numériques un peu partout mais spécialement dans [4] et [8].

Une vérification expérimentale est indiquée dans [18], et [29] est une table de la fonction factorielle incomplète.

Je remercie vivement le Professeur Perrin et le Professeur Fortet pour la bienveillante attention qu'ils ont accordé à cette étude qui m'a été suggéré par une équipe de physiciens travaillant sur des accélérateurs pulsés. Je suis redevable en particulier à MM. Claude Magnan, Paul Chanson, René Combe, Georges Boulègue ainsi qu'a Mme Thérèse Frelot d'intéressantes discussions sur ce sujet.

Manuscrit reçu le 25 mars 1955.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] ALAOGLU L. et SMITH N. M. — *Phys. Rev.*, 1938, **53**, 832.
[2] ALBERT G. E. et NELSON L. — *Ann. Moths. Statistics*, 1953, **24**, 9.
[3] ARMITAGE P. — *Biometrika*, 1949, **36**, 257.
[4] BLACKMAN M. et MICHIELS J. L. — *Proc. Phys. Soc.*, 1948, A **60**, 549.
[5] BRUNETTI et OLLANO. — *Nuovo Cimento*, 1933, **10**, 92.
[6] BURGER. — *Ann. Physik*, 1932, **12**, 283.
[7] CLARK C. E. — *Rev. Scient. Instr.*, 1949, **20**, 51.
[8] DAMON P. E. et WINTERS P. N. — *Nucleonics*, 1954, **12**, 36.
[9] DANFORTH. — *Phys. Rev.*, 1934, **46**, 1026.
[10] ÉVANS et MUZELE. — *Phys. Rev.*, 1935, **47**, 427.
[11] FEATHER N. — *Proc. Cambridge Phil. Soc*, 1949, **45**, 648
[12] FEATHER N. — *British Atomic Energy Report*, janvier 1945.
[13] FELLER W. — A volume for Anniversary of Courant, 1948.
[14] FORTET R. — Calcul des probabilités, Collection du C. N. R. S.
[15] HAMMERSLEY J. M. — *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 1953, **49**, 623.
[16] HOLE N. — *Ark Mat. Astr. Fys.*, 1948, **33** A, **34** B, 8.
[17] JOHNSON et STREET. — *J. Franklin Inst.*, 1933, **215**, 239.
[18] LIFSCHUTZ H. et DUFFENBACH S. — *Phys. Rev.*, 1938, **54**, 714.
[19] LOCHER G. L. — *J. Franklin Inst.*, 1933, **216**, 553.
[20] POLLACZEK F. — *C. R. Acad. Sc.*, 1954, **238**, 766.
[21] RUARK A. E. et BRAMMER F. E. — *Phys. Rev.*, 1937, **52**, 322.
[22] SCHIFF L. I. — *Phys. Rev.*, 1950, **93**, 539.
[23] SCHULZE. — *Z. f. Physik*, 1932, **74**, 350.
[24] SKINNER S. M. — *Phys. Rev.*, 1935, **48**, 438.
[25] TAKACS L. — *Magyar Tud. Akod. Mat. Fiz Oszt.*, 1951, 371.
[26] TAKACS L. — *Acta. Math. Acad. Sc. Hungar.*, 1953, **2**, 275.
[27] VOLZ H. — *Z. Physik*, 1935, **93**, 539.
[28] WESTCOTT. — *Proc. Roy. Soc. London*, 1948, S. A. **194**, 508.
[29] Tables of the incomplete Γ function (H. M. Station-Office, London), 1922.

LETTRES A LA RÉDACTION

SUR LE SPECTRE INFRAROUGE DE H_2, INDUIT PAR LE CHAMP INTERMOLÉCULAIRE DANS LES MÉLANGES H_2—ClH ET DANS H_2 PUR COMPRIMÉS

Par MM. Roger Coulon, Louis Galatry, Jean Robin et Boris Vodar,

Laboratoire des Hautes Pressions, Bellevue (Seine-et-Oise).

A. Un calcul antérieur [1] faisait prévoir que, dans un mélange gaz polaire-gaz non polaire, le moment permanent du gaz polaire serait capable d'induire une absorption notable à l'endroit de la fréquence normalement interdite du gaz non polaire. Cette absorption se superposerait à l'absorption induite du gaz non polaire pur, dans le cas où la densité de celui-ci serait suffisante pour qu'elle apparaisse.

Nous avons donc étudié, à l'aide d'un appareillage approprié [2], la région du spectre fondamental de H_2 pour les mélanges ClH$-H_2$ dans les conditions suivantes :

1° La cuve de 42 cm étant remplie de H_2 sous 10 amagats, nous avons ajouté des quantités croissantes de ClH jusqu'à une densité partielle d'environ 110 amagats ($t = 100°$ C). Le spectre induit de H_2, pratiquement invisible dans le gaz pur, apparaît alors avec une intensité beaucoup plus forte (*fig.* 1 A) que dans les mélanges H_2-gaz non polaire [3], le profil conservant la même allure générale.

2° Nous avons alors comparé le résultat précédent à la perturbation que pouvait apporter une petite quantité de ClH (3,3, puis 6,6 amagats) au spectre induit de H_2 (92 amagats). La courbe B (*fig.* 1) montre

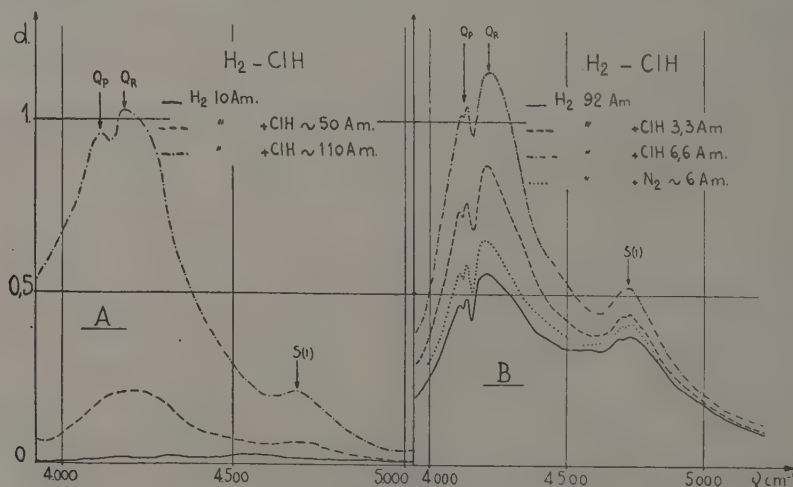


Fig. 1.

que 6,6 amagats de ClH suffisent à doubler l'intensité de la branche Q sans apporter de modifications sensibles au profil de la bande, alors qu'une densité équivalente de N_2 ajoutée à une même quantité de H_2 ne donne qu'un accroissement beaucoup plus faible.

Ces deux effets tendraient donc à prouver l'action particulière due à la polarité du gaz perturbateur qui apparaît dans le terme $[\alpha'_2]T_{21}\vec{M}_p$ de la référence [1]. Nous avons, par ailleurs, constaté que dans les mélanges H_2—CO_2, le moment quadrupolaire important de ce dernier gaz peut provoquer des effets comparables à ceux décrits ci-dessus.

B. Les enregistrements précédents mettent en évidence les séparations en deux maxima (Q_{P_1}, Q_{P_2}) de la branche Q_P et $S_P(1)$, $S_R(1)$ de la raie $S(1)$ du spectre induit de H_2. Afin de s'assurer que cette structure n'était pas due à la présence de ClH, une

étude de H_2 pur a été faite. Les enregistrements (*fig.* 2) montrent que, dans des conditions convenables, cette structure est encore observable.

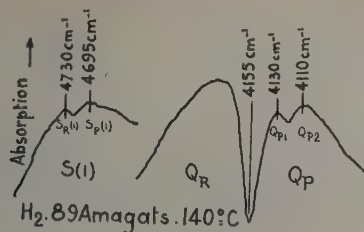


Fig. 2.

Pour la raie $S(1)$ la séparation observée peut s'interpréter par l'hypothèse de Chisholm et Welsh [3] de rotation d'un couple bimoléculaire. Par contre, on ne peut pas considérer la séparation de la branche Q_P comme structure fine d'une telle bande de rotation, à cause de la séparation $\delta\nu$ entre Q_{P_1} et Q_{P_2} beaucoup trop importante en regard de celle entre Q_P et Q_R (la formule simple du doublet de Bjerrum laisserait prévoir 2 cm^{-1} au lieu des 22 ± 2 cm^{-1} observés).

Cette séparation ne se produit que sur la partie Q_P de la branche Q. D'autre part, les raies Q_{P_1} et Q_{P_2} se placent sensiblement, dans la limite de nos erreurs de mesures, aux fréquences correspondant aux transitions $J = 4 \rightarrow J = 4$ (4 101 cm^{-1}) et $J = 3 \rightarrow J = 3$ (4 125 cm^{-1}) de la branche Q du spectre Raman de H_2. Ceci incite à penser que les raies proviennent d'une molécule relativement isolée plutôt que de la rotation d'un couple de molécules et qu'elles sont induites dans cette molécule par le champ intermoléculaire $\vec{E}$ (de l'ordre de 10^5 V/cm), provenant des dipôles induits dans les couples moléculaires voisins. Cette induction se produirait suivant un processus qui généralise celui imaginé par Condon [4] dans le cas d'un champ statique. Il suffit en effet de remarquer que les formules données par ce dernier restent valables dans le cas où le champ $\vec{E}$ est fonction de variables autres que les variables de position de la molécule étudiée. $\vec{E}$ est ici fonction des paramètres qui définissent un couple moléculaire voisin. Les autres raies de la branche Q ($J = 2 \rightarrow J = 2$, $J = 1 \rightarrow J = 1$, $J = 0 \rightarrow J = 0$) ne sont pas visibles à cause de notre fente trop large (~ 6 cm^{-1}) par rapport à l'intervalle entre ces raies, et de la superposition de la structure (Q_P, Q_R) provenant des couples moléculaires. Cette observation rejoint celle de Crawford et Dagg [5] qui ont mis en évidence l'effet Condon dans H_2 avec un champ statique.

Manuscrit reçu le 13 mai 1955.

[1] Galatry L. et Vodar B. — *C. R. Acad. Sc.*, 1955, **240**, 1072.
[2] Coulon R. — *J. Physique Rad.*, 1955, **16**, 343.
[3] Chisholm D. A. et Welsh H. L. — *Canad. J. Phys.*, 1954, **32**, 291.
[4] Condon E. U. — *Phys. Rev.*, 1932, **41**, 759.
[5] Crawford M. F. et Dagg I. R. — *Phys. Rev.*, 1953, **91**, 1569.

UTILISATION INDUSTRIELLE DU RAYONNEMENT DE FREINAGE

Par P. Lévêque et P. Martinelli,

Section des Applications des Radioéléments,
Département de Physico-Chimie,
Centre d'Études Nucléaires de Saclay.

L'absorption du rayonnement β s'accompagne de l'émission des raies K caractéristiques des constituants de la matière absorbante et d'un spectre continu de rayons X de freinage (Bremsstrahlung). Nous avons ainsi la possibilité, en combinant une source radioactive n'émettant que des β avec des écrans de nature variable, d'obtenir des sources de rayons X de faibles énergies. Ces sources peuvent avoir de multiples emplois industriels (radiographie γ, mesures d'épaisseur, analyses) maintenant qu'il est possible d'obtenir des émetteurs β très concentrés.

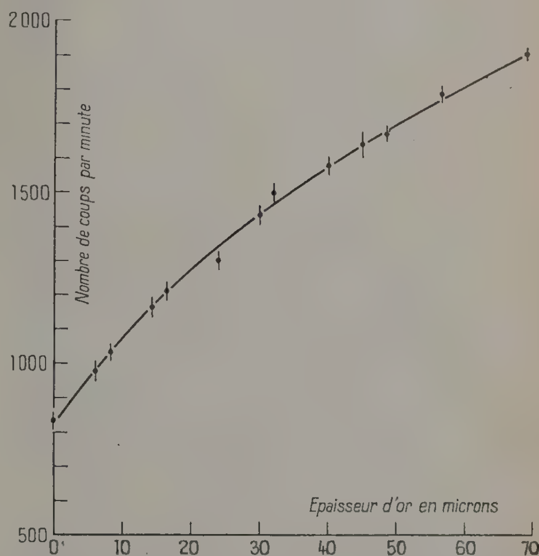


Fig. — Mesure des épaisseurs de dépôts d'or par fluorescence X au moyen d'une source de rayons β. Source Sr 90, Yttrium 90.

Nous étions en train d'étudier ces possibilités (demande de brevet français déposée le 12 avril 1955 sous le nº 689.428) lorsqu'a été publié l'article de L. Reiffel (*Nucleonics*, 1955, **13**, nº 3, 22-24) intitulé : *Beta ray excited low-energy X-Ray sources.* Nos résultats sont en accord avec les siens, auxquels nous pouvons ajouter quelques données supplémentaires :

1º Rendement apparent $\frac{X}{\beta}$ (seuls les X ayant une énergie plus grande que 25 keV sont pris en considération) :

Pour une source de $^{90}(Sr + Y)$ et pour des écrans de 1 g/cm^2, il varie de 4,1 pour 100 pour l'aluminium à 8,1 pour 100 pour le plomb. Ces rendements étant calculés pour le β de 2,18 MeV de l'yttrium.

2° Maximum du spectre de bremsstrahlung. Avec une source de ^{90}(Sr + Y), il se déplace de 60 keV pour l'aluminium à 180 keV pour le plomb. Avec une source de phosphore 32, il est situé à 45 keV pour l'aluminium et à 160 keV pour le plomb.

3° La détermination des épaisseurs de couches d'or déposées sur du laiton a été effectuée en irradiant la pièce avec un faisceau de β canalisé (angle solide d'ouverture : 0,004 × 4π stéradians). La mesure utilise un ensemble de comptage à scintillations. Un sélecteur à un canal permet de ne compter que les X de la raie *K* de l'or. La courbe d'étalonnage a été établie pour des épaisseurs d'or variant de 0 à 70 μ. La précision d'une telle mesure est de l'ordre de 3 pour 100.

Manuscrit reçu le 28 avril 1955.

PRÉPARATION DE COUCHES MINCES SANS SUPPORT

Par P. Prugne, J. Blandin-Vial (1),
A. Godin, G. Lechauguette et P. Léger,
Service de Physique Nucléaire, C. E. N. de Saclay.

Certains d'entre nous [1] ont décrit une méthode pour obtenir des dépôts de différents corps sur des films très minces de matière plastique. Nous avons été amenés par la suite à envisager la dissolution de ce support plastique : celui-ci est, en effet, souvent gênant, soit par ses constituants, soit parce qu'il est très difficile de l'obtenir en couche homogène.

Nous avons mis au point une méthode de dissolution. Le dépôt est fait sur une plaque de verre, en employant la méthode décrite dans l'article précité. Décollé à la surface de l'eau, il est recueilli sur un cadre qui, dans le cas présent, doit être constitué de deux parties planes et polies, se juxtaposant parfaitement et pouvant être serrées l'une contre l'autre par des vis. La partie délimitant le dépôt est, de préférence, chanfreinée. La feuille recueillie sur une des parties du cadre est mise à sécher, avant qu'on lui applique la seconde partie. On serrera ensuite avec des précautions d'autant plus grandes que le dépôt est plus mince.

La dissolution s'opère par l'immersion lente et régulière du dépôt monté sur son cadre dans le solvant choisi. Ce solvant est, en général, du chloroforme ou du dioxanne. Lorsqu'on emploie du chloroforme, il est nécessaire, afin d'éviter l'action brutale de ses vapeurs qui détruiraient le dépôt, d'y verser avec précaution un peu d'alcool éthylique qui surnage assez longtemps. Dans le cas du dioxanne, il suffit d'arrêter la feuille quelques instants au-dessus du bain. L'immersion devra durer une heure environ. Il faudra faire cette opération mécaniquement en évitant toutes vibrations de l'appareil.

Nous avons préparé, en suivant cette méthode, des feuilles de divers éléments. Les épaisseurs minima actuellement obtenues sont :

	(μg/cm²).		(μg/cm²).		(μg/cm²).
Au.......	40	Sn.......	50	Se.......	30
Ag.......	30	Bi.......	45	Cd.......	800 [2]
Ni.......	300	Pd.......	40	Te.......	50
Sb.......	30	Cu.......	30	In.......	80
Al.......	3	Si.......	50	Mn......	400

La dissolution du support n'offre pas de difficultés pour la plupart des métaux cités, et les dépôts peuvent être réalisés en diverses dimensions. Il a été fait, en particulier, des dépôts de Al, Au, Ag, Cu de 30 cm² environ.

Dans le cas de dépôts de grandes surfaces (diamètre supérieur à 50 mm) et de faibles épaisseurs, il est utile de faire tout d'abord une couronne épaisse du même élément de façon à éviter les déchirures au moment de fixer les deux parties du cadre ensemble. C'est la couronne épaisse qui est ainsi serrée dans le cadre.

La préparation de certains métaux selon cette méthode présente néanmoins des difficultés dues aux faits suivants : oxydation, réaction avec les solvants ou avec la matière plastique, difficulté d'évaporation [2].

Les feuilles minces d'indium ont été obtenues sur un support de plexiglass dissous dans le dioxanne, à condition d'opérer rapidement après l'évaporation. On a remarqué, en effet, que, 24 h après celle-ci, la dissolution du support s'avérait impossible (il semblerait qu'il se forme lentement un composé organo-métallique avec le plastique). Des essais sur le polystyrène, le formvar, le caoutchouc chloré n'ont donné aucun résultat (composés organo-métalliques formés immédiatement).

L'oxydation des couches de manganèse provoque, dès le décollement du film, des stries qui constituent des amorces de cassure; néanmoins, il a été possible de dissoudre le support dans du dioxanne sans destruction de la feuille mais celle-ci présente des trous et des accidents nombreux.

Les feuilles minces de nickel évaporées directement sur plastique (polystyrène et formvar) se détruisent à la dissolution. Nous avons pensé utiliser la méthode préconisée par Bashkin [3] mais en l'appliquant à l'évaporation thermique. Une couche de cuivre très épaisse (1 mg/cm²) est pré-évaporée sur le support de polystyrène; puis on évapore le nickel sur le cuivre. Après dissolution du plastique dans le dioxanne, on opère comme Bashkin pour dissoudre le support de cuivre.

Nous avons envisagé, pour certains corps qu'il s'avère difficile d'obtenir seuls, de les prendre entre deux couches métalliques; par exemple, nous avons réalisé des couches minces d'oxyde de baryum entre deux couches d'or (or, 50 μg/cm²; oxyde de baryum, 50 μg/cm²; or, 100 μg/cm²).

D'autres essais sont en cours.

Ces travaux ont été exécutés sous la direction de M. Berthelot, Chef du Service de Physique Nucléaire.

Manuscrit reçu le 16 mai 1955.

(1) Du laboratoire du Grand Aimant Permanent (C.N.R.S., Bellevue), actuellement en stage au Service de Physique nucléaire du C. E. A.

[1] Barreau P., Léger P., Moreau J. et Prugne P. — *J. Physique Rad.*, 1954, **15**, 4A-7A.
[2] Garin P., Prugne P. — *J. Physique Rad.*, 1954, **15**, 829-830.
[3] Bashkin. — *Rev. Sc. Instr.*, 1951.

ÉTUDE DE LA DISPERSION EN FRÉQUENCE DE LA CONDUCTIVITÉ DU BORE ET DE $B_{12}Al$

Par J. Lagrenaudie,
Laboratoire de Physique de l'École Normale Supérieure.

1. L'étude de la conductivité en continu, en fonction de la température, a déjà été effectuée sur le Bore et le $B_{12}Al$, sous forme de blocs fondus compacts; on en a tiré plusieurs énergies d'activation des impuretés. De nombreux auteurs ont déjà montré que, sur des semi-conducteurs non compacts ou non homogènes, la conductivité globale mesurée à diverses fréquences, décroissait en même temps que la fréquence, à température donnée, suivant le schéma classique de l'effet de Maxwell et Wagner. Une telle étude a été reprise sur B et $B_{12}Al$ en blocs fondus, en opérant aux fréquences de 1 MHz, 100, 10 et 1 kHz et 100 Hz et à températures allant de l'ambiante jusqu'à 110° K environ.

2. Pour chaque échantillon, les courbes, correspondant chacune à une fréquence déterminée, ont, sur le diagramme semilogarithmique $\log_{10} R /\!\!/ \frac{1}{T}$, la forme de lignes brisées (*fig.* 1), mais les pentes des

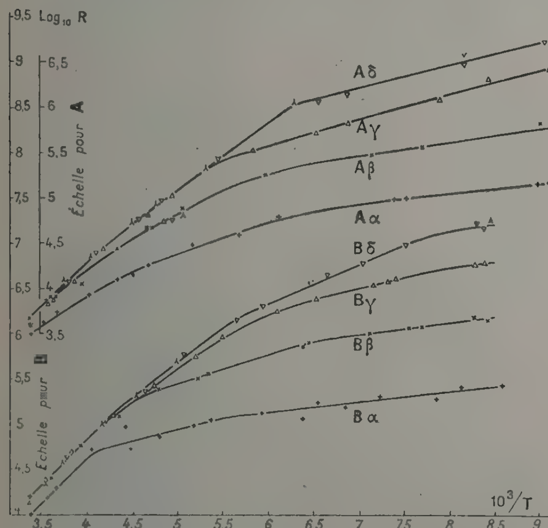


Fig. 1. — Résistance en fonction de la tempétature et de la fréquence pour B et $B_{12}Al$. A : $B_{12}Al$; B : Bore; α : 1 MHz; β : 100 kHz; γ : 10 kH$_3$; δ : 1 kHz et 100 Hz.

diverses segments se retrouvent sensiblement d'une courbe à l'autre : on en conclut que les mêmes impuretés, responsables de la conduction, interviennent dans chaque cas, la dispersion en fréquence traduisant une répartition hétérogène de ces impuretés, peut-être par suite d'une ségrégation d'impuretés chimiques ou défauts de réseaux dans la région périphérique des grains cristallins, au cours de la solidification assez rapide du matériau fondu. La conductibilité apparente, à température donnée, croît avec la fréquence, ce qui implique que la partie centrale des grains cristallins soit plus conductrice que la partie marginale ou le remplissage intergrains, surtout aux basses températures; à température relativement élevée, où jouent les impuretés à haut niveau, on trouve une dispersion plus faible, ce qui montre que ces dernières impuretés sont mieux réparties.

3. Le schéma le plus simple représentant l'ensemble du matériau, est celui de grains (*fig.* 2) de

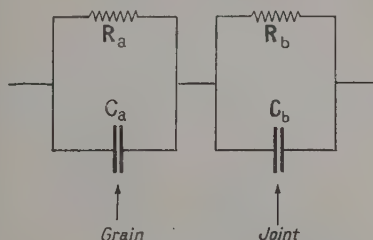


Fig. 2. — Schéma d'un semi-conducteur granulaire.

résistance R_a et capacité C_a, en série avec des « joints » de résistance R_b et capacité C_b. Ces derniers, très minces, sont plus résistants aux basses températures : $R_a \ll R_b$, $C_a \ll C_b$, (R_a et R_b fonctions de T). Un calcul simple donne, pour la conductance globale $\frac{1}{R}$ et la capacité globale C de l'ensemble, à pulsation ω fixée

$$\frac{1}{R} = \frac{R_a + R_b + \omega^2 R_a R_b (R_a C_a^2 + R_b C_b^2)}{(R_a + R_b)^2 + \omega^2 R_a^2 R_b^2 (C_a + C_b)^2},$$

$$C = \frac{R_a^2 C_a + R_b^2 C_b + \omega^2 C_a C_b R_a^2 R_b^2 (C_a + C_b)}{(R_a + R_b)^2 + \omega^2 R_a^2 R_b^2 (C^a + C_b)^2}$$

et, quand ω varie de 0 à ∞, $\frac{1}{R}$ croît constamment, en variant très peu pour ω petit $\left[\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{R}\right) = 0 \text{ à } \omega = 0\right]$.

Ceci justifie la forme du faisceau de courbes « isofréquences » de chaque échantillon : confondues dans la zone des températures élevées, elles se séparent, lorsque T décroît, successivement et non simultanément, de celle qui correspond à la plus basse fréquence, sette séparation ayant lieu dans l'ordre des fréquences décroissantes et, à T fixe, la conductance apparente croît avec la fréquence.

En réalité, à T donné, la conductivité locale ρ dans chaque grain varie de façon continue en fonction des coordonnées d'espace, décroissant de la surface vers le centre, suivant une loi qui dépend elle-même de T.

Un des avantages des mesures à fréquence élevée est de déceler les énergies d'activation les plus basses,

correspondant à des impuretés placées au centre des grains et inobservables en continu, où les joints inter-grains jouent le rôle essentiel.

4. Pour B et $B_{12}Al$, les niveaux obtenus, assez reproductibles d'un échantillon à l'autre, sont indiqués dans le tableau joint; ils sont voisins de ceux déjà trouvés dans les études faites en continu. De plus, il y a une assez grande ressemblance entre les deux matériaux. Les densités ont été mesurées aussi et, pour les deux, sont voisines de 2,39 (un peu plus que la valeur usuellement admise 2,33 pour B); l'analogie entre les deux matériaux semble assez étroite.

Énergies d'activations d'impuretés mesurées sur B *et* B_{12} Al.

Bore	I.....	–	–	–	0,24	–	0,42
	II....	0,05	0,12	0,18	–	0,29	0,43
	III....	0,07	0,09	0,17	0,24	–	–
	IV....	0,06	0,12	–	0,24	0,32	–
	V.....	–	0,10	0,16	–	0,29	–
	VI....	0,07	0,15	0,20	–	0,30	–

B_{12} Al	I..........	0,04	0,12	0,20	0,31
	II.........	0,055	0,13	0,20	0,32
	III........	0,056	0,10	0,22	0,32
	IV.........	0,056	0,12	0,26	0,34

Dans les mesures à fréquence élevée et à température basse, on peut atteindre la constante diélectrique K de l'échantillon. On a ainsi obtenu, pour le bore, des valeurs K encore trop élevées, et, pour $B_{12}Al$, K voisin de 10 à 12 : cette valeur est à rapprocher de celle du pouvoir réflecteur dans le rouge sur $B_{12}Al$, voisine de 0,25. Les caractéristiques courant-tension sont restées pratiquement ohmiques, jusqu'à 90 V, sur les échantillons ici étudiés de B et $B_{12}Al$.

5. Les mesures hertziennes se révèlent ainsi très utiles, soit pour vérifier l'homogénéité de semi-conducteurs fondus, notamment polycristallins, soit pour étudier dès matériaux qui ne peuvent être obtenus, ou utilisés, sous forme compacte et homogène.

Je remercie M. le Professeur Rocard, Directeur du Laboratoire de l'École Normale et M. le Professeur Freymann de la Faculté de Rennes. Je remercie aussi M. le Docteur Verwey et N. V. Gloeienlampenfabricken Philips (Eindhoven), qui m'ont aimablement fourni $B_{12}Al$, ainsi que MM. Trombe et Foëx pour la fusion de celui-ci et M. Guillemin.

Manuscrit reçu le 6 mai 1955.

[1] Uno, Irie, Yoshida et Shinohara. — *J. Sc. Research Inst.*, Japan, 1953, **47**, n° 1329, 216 et n° 1330, 223.

[2] Meinnel. — *J. Physique Rad.*, 1954, **15**, 124.

[3] Rau. — *Semi-Annual Report*, University of Pennsylvania, janv.-juin 1954.

[4] Mc Donald. — *Phys. Rev.*, 1953, **91**, n° 2, 412.

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DU RAYONNEMENT ÉMIS PAR LE DÉPOT ACTIF DU THORIUM A L'AIDE D'ÉMULSIONS PHOTOGRAPHIQUES;

Par M[lle] M. Ader,

Laboratoire de Physique atomique et moléculaire du Collège de France.

Le dépôt actif du thorium fait sur support d'argent et exposé à des plaques photographiques C_2 Ilford 50 μ a permis d'obtenir les clichés suivants :



Fig. 1.

Le cliché 1 a enregistré les traces de Th $(C + C')$:

Les rayons α du ThC mesurent 4,7 cm dans l'air, 27 μ dans l'émulsion.

Les rayons α du ThC' mesurent 8,6 cm dans l'air, 48 μ dans l'émulsion.

Ces sources émettent 35 pour 100 de rayons α de ThC pour 65 pour 100 de ThC'. On voit sur ce cliché quatre traces courtes provenant du ThC et sept traces nettement plus longues attribuables au ThC'.

Les clichés 2 et 3, pris dans une région plus éloignée

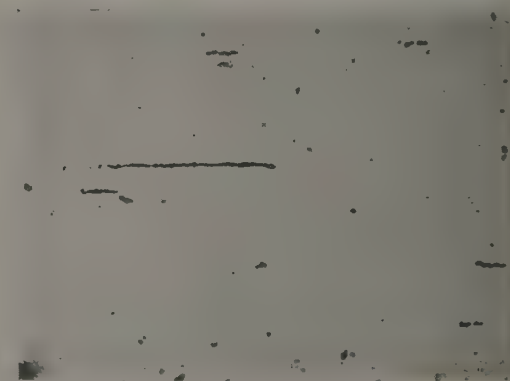


Fig. 2.

de la source, ne présentent plus que des traces courtes provenant du ThC' et une trace très sensiblement plus longue due à un rayon α de parcours 11,7 cm dans l'air et 69 μ dans l'émulsion. Le nombre de ces dernières traces est de 189 pour 10^6 rayons α de 8,6 cm de parcours dans l'air.

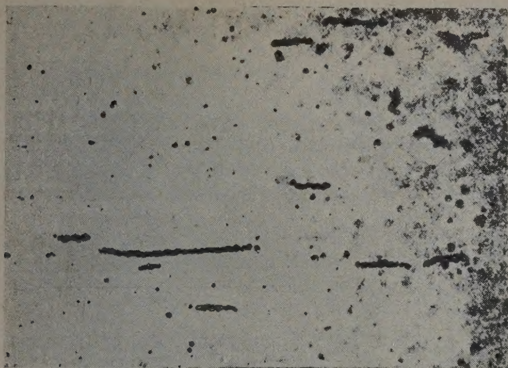


Fig. 3.

La partie gauche du cliché 4 montre, parmi des traces de rayons α du ThC', en surface de l'émulsion, une très longue trajectoire dont la partie droite s'enfonce dans l'émulsion.

Le nombre de ces trajectoires de grand parcours déjà signalées [1] semble être de 3 à 4 pour 10^6 rayon α du Th C'.

Les agrandissements photographiques ont été faits par Mlle Albouy.

Manuscrit reçu le 21 mai 1955.

[1] Ader M. — *J. Physique Rad.*, 1954, **15**, 583.

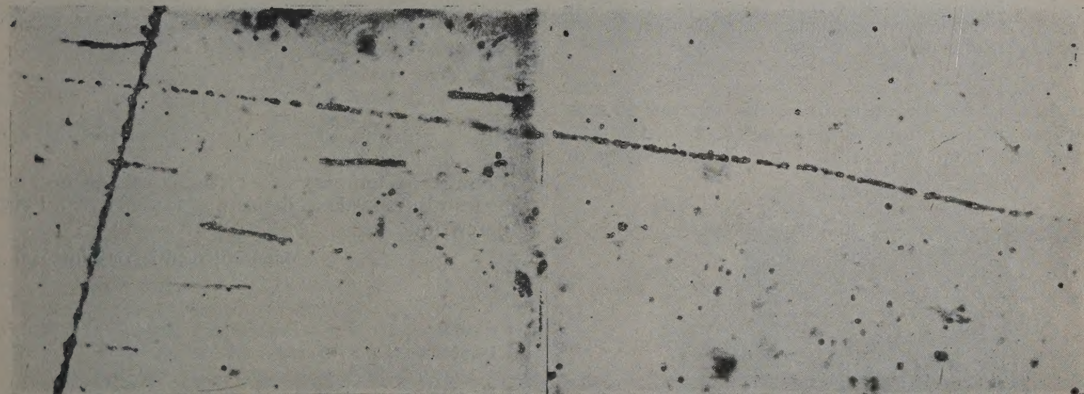


Fig. 4.

ONDES DE CHOC ENGENDRÉES DANS L'ARGON LIQUIDE ET LEUR ÉTUDE PAR RADIOGRAPHIE ULTRARAPIDE. COMPRESSION DE L'ARGON AUX TRÈS HAUTES PRESSIONS

Par J. Dapoigny, J. Kieffer et B. Vodar,
Laboratoire des Hautes Pressions, Bellevue.

L'Argon est contenu dans un vase en plexiglass dont la partie centrale est mise en communication avec une bouteille d'argon, tandis que le tout est porté à basse température par trempage dans un vase de Dewar rempli d'azote liquide. On laisse l'azote liquide pénétrer entre les deux parois. Dans ces conditions, l'argon se liquéfie dans la partie centrale; quand le niveau d'argon est suffisamment haut on retire le vase de plexiglass du vase de Dewar; tant qu'il reste de l'azote entre les deux parois, l'ébullition de l'argon ne se produit pas. On laisse donc l'azote s'évaporer et l'ébullition de l'argon commence 20 s après la disparition totale de l'azote. C'est au cours de ces 20 s que l'on porte le vase sur la charge de penthrite, que l'on provoque l'explosion et le déclenchement du tube à rayons X.

Les figures 1*a*, 1*b* et 1*c* montrent le vase en plexiglass avant et après l'explosion. L'argon, dans le tube central, apparaît en sombre. Ce tube central comporte deux parties de diamètre 4 et 8 mm (mais avec les mêmes épaisseurs de parois de plexiglass) pour permettre la graduation photométrique des clichés.

On aperçoit sur les figures le cordeau détonant, avec ses repères en plomb, destiné à la mesure des durées de trajet de l'onde. Ce cordeau est allumé par la charge de penthrite (non visible sur le cliché) sur laquelle repose le vase de plexiglass. La figure 1*b* montre que le cordeau a détoné sur une longueur correspondant à 3 μs. Mais des expériences prélimi-

naires nous ont montré que notre système d'allumage donnait au cordeau détonant une avance de 0,5 µs. La radiographie 1*b* correspond donc à une durée de

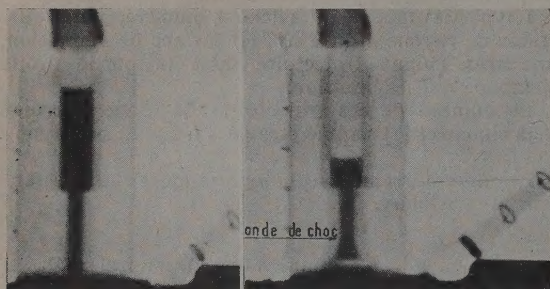


Fig. 1 *a*. Fig. 1 *b*.

Fig. 1 *a*. — Radiographie prise avant l'explosion. Le cordeau détonant est intact.

Fig. 1 *b*. — Radiographie prise après l'explosion. Le cordeau détonant a détoné sur une longueur correspondant à 3 µs. L'onde a effectué un trajet de 9 mm.

trajet de 2,5 µs. Les différences de niveau d'argon observées sur les radiographies 1*a*, 1*b* et 1*c*, tiennent au fait que, pour les réaliser, il a été nécessaire de

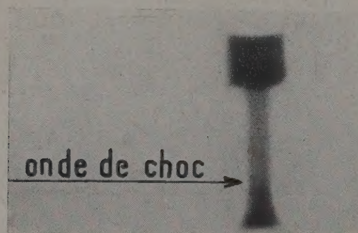


Fig. 1 *c*.

Cette radiographie est la même que celle de la figure 1 *b*, mais tirée sur papier contrasté afin de mieux faire apparaître l'onde de choc, tandis que les radiographies 1 *a* et 1 *b* ont été surexposées pour faire apparaître le tube de plexiglass et le cordeau détonant.

procéder à deux remplissages distincts du tube, et que les quantités d'argon ne se sont pas trouvées être les mêmes.

La figure 2 représente la courbe de compressibilité que nous avons obtenue pour l'argon ; elle s'étend jusqu'à 75 000 kg/cm². Il n'existe pas, au-delà de 15 000 kg/cm², de données expérimentales sur la compressibilité statique de l'argon. La comparaison des courbes 1 et des isothermes de Bridgman [1] montre que la température dans l'onde de choc s'élève rapidement puisque vers 15 000 kg/cm² elle coupe l'isotherme + 55° C. Comme on est parti d'argon liquide à pression normale (ayant donc une température entre $t_f = -189°,2$ et $t_e = -185°7$) une onde de choc de cette intensité produit un échauffement d'environ 240°, supérieur à ce que nous avions trouvé pour d'autres substances et en particulier pour l'eau [2], [3]. On comprend qu'il en soit ainsi si l'on se rappelle que la chaleur spécifique de l'argon

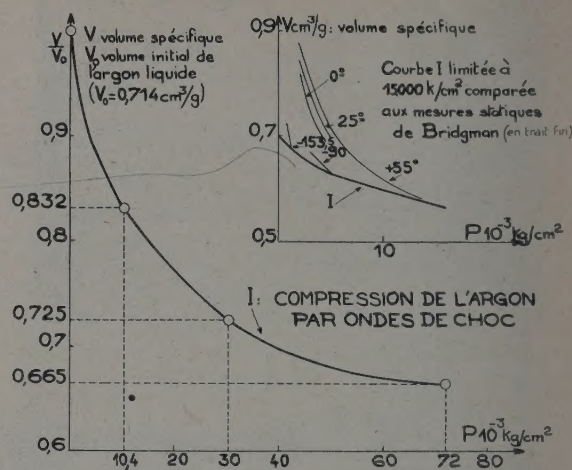


Fig. 2.

liquide à pression normale (1,1 J/g) est très inférieure à celle de l'eau (4,2 J/g).

Comme la température critique est de — 122° C tous les résultats de la figure 2 se rapportent à l'argon supercritique.

Manuscrit reçu le 10 juin 1955.

[1] Bridgman P. W. — *Proc. Amer. Acad.*, 1934, **70**, 1-32.
[2] Dapoigny J., Kieffer J. et Vodar B. — *C. R. Acad. sc.*, 1954, **238**, 215-217.
[3] Dapoigny J., Kieffer J. et Vodar B. — *Journal de Recherches des Laboratoires de Bellevue*, juin 1955, n° 31 (à paraître).

ESTIMATION DES PARCOURS DES ATOMES DE RECUL ^{32}P ET ^{35}S PROJETÉS LORS DES RÉACTIONS Nα ET Np SUR LE CHLORE

Par Pierre Süe,

Laboratoire de Physique et Chimie nucléaires du Collège de France.

Lors de la capture d'un neutron thermique, les noyaux subissent un recul et sont projetés dans le milieu environnant. La rupture des liaisons chimiques est due presque exclusivement à l'émission γ et à la conversion interne et les atomes radioactifs formés sont expulsés de la molécule. Ils peuvent être extraits chimiquement, dans le cas des réactions n, γ sur des molécules organométalliques, selon la technique de Szilard-Chalmers.

Pour les réactions n, p et n, α réalisées avec des neutrons rapides, les parcours sont notables et si les réactions sont faites sur des grains très fins, une partie des atomes de recul peut franchir la surface et être recueillie.

Nous avons essayé dans ce travail de séparer des radioéléments par la méthode physique faisant intervenir le recul, que nous avons en même temps estimé.

Les essais ont porté sur les radioéléments formés en irradiant Cl de NaCl par des neutrons rapides de la pile Zoé. On produit ainsi les deux réactions ${}^{35}_{17}Cl\ (n, \alpha)\ {}^{32}_{15}P$ et ${}^{35}_{17}Cl\ (n, p)\ {}^{35}_{16}S$. Les grains de NaCl pulvérisés dans un broyeur à boulets étaient mêlés à de la paraffine fondue, milieu où s'effectuait le recul. Après irradiation la paraffine est séparée du NaCl soit par filtration à chaud, soit par dissolution dans du benzène. Mesurée au compteur, elle contient bien ${}^{32}P$ et ${}^{35}S$. Cette technique fort simple a dû être écartée, car il est difficile d'obtenir une suspension homogène : les grains très fins de NaCl se rassemblent lors de la solidification, pourtant rapidement réalisée, de la paraffine. Enfin, il n'est pas facile de séparer les radioéléments de la paraffine, si bien que cette méthode ne convient pas pour une préparation.

Dans nos derniers essais, nous avons réalisé une alternance de couches minces de NaCl et de naphtalène, dont il est aisé de se débarrasser par sublimation. L'empilement est obtenu dans un pastilleur avec du NaCl dont les grains ont en moyenne 3 μ de rayon. Le nombre de couches utilisées est compris entre 10 et 35, leur épaisseur étant environ de 0,1 mm pour NaCl et 0,5 mm pour le naphtalène.

Après irradiation, l'empilement est broyé au mortier, le naphtalène est dissout par le benzène et essoré, NaCl est retenu sur un Gooch. Le benzène est distillé et le naphtalène où s'est effectué le recul est isolé; sublimé il laisse sur un verre de montre le mélange, en traceurs, de ${}^{32}P$ et ${}^{35}S$, qui est mesuré dans sa totalité, puis les β peu énergiques du soufre sont arrêtés par un écran en aluminium, ce qui permet d'évaluer ${}^{32}P$.

Le rendement de cette extraction par recul est très faible, il est de l'ordre de 1 pour 100 pour ${}^{32}P$ et 0,1 pour 100 pour ${}^{35}S$, si bien qu'il n'est pas possible d'envisager ainsi la préparation de ces radioéléments, les surfaces utiles NaCl-naphtalène étant trop peu importantes. Par contre, il est possible de connaître la portée de ces atomes radioactifs dans le naphtalène.

Si les trajectoires étaient rectilignes on pourrait déterminer le parcours, mais étant donné les faibles vitesses des atomes de recul dont l'absorption se fait par chocs atomiques, les trajectoires sont brisées, aussi dans ces expériences on mesure en fait, une valeur moyenne de la portée, donnée inférieure au parcours.

Soit A l'activité d'un des radioéléments dans M grammes de NaCl et a celle dans le naphtalène. On peut dire que a semble provenir d'une masse m de NaCl égale à $m = \frac{Ma}{A}$ représentée aussi par le produit : surface S, épaisseur e et densité ρ soit $m = Se\rho$. L'épaisseur e étant égale à $e = \frac{m}{S\rho} = \frac{Ma}{AS\rho}$. Pour avoir la portée, il faut diviser cette épaisseur globale par le nombre n de couches, qu'il faut multiplier par 2 car il y a deux faces en jeu. En admettant que ces surfaces soient formées par les demi-sphères jointives de chaque grain, la surface de diffusion de la demi-sphère est le double de celle de la surface de la projection, ce qui introduit un facteur 2 supplémentaire. Enfin, on calcule que seul 1/4 des atomes de recul, se trouvant dans la couche d'épaisseur p, peut sortir du NaCl. Il en résulte que la portée est donnée par

$$p = \frac{aM}{A\,2S\rho\,\frac{2n}{4}} = \frac{aM}{AS\rho n}$$

et plus généralement $p = \frac{a}{A} E$, où E est l'épaisseur d'une couche, donnée par $M = S\rho n E$.

Dans une série de 10 irradiations différentes en neutrons rapides, on a obtenu pour les valeurs moyennes des portées dans NaCl :

$${}^{32}P = 0{,}5 \pm 0{,}2\,\mu, \qquad {}^{35}S = 0{,}05 \pm 0{,}03\,\mu.$$

Les énergies des neutrons rapides produits dans une pile sont très variables. A titre indicatif nous avons calculé l'énergie de recul de ${}^{32}P$ et ${}^{35}S$ pour des neutrons de 2 MeV, groupe important dans la pile. On trouve que ${}^{32}P$ et ${}^{35}S$ ont respectivement une énergie de 0,88 et 0,24 MeV qui peuvent expliquer les valeurs obtenues expérimentalement.

Manuscrit reçu le 1er juin 1955.

RÉALISATION D'UNE GRANDE MIRE DESTINÉE A L'ÉTUDE DES OBJECTIFS PHOTOGRAPHIQUES

Par Jeanne GAULTIER DU MARACHE,
Laboratoire de Physique,
Université de Besançon.

Quand on utilise un objectif pour prendre une photographie, la transmission globale objet-image photographique comprend :

1° une transmission optique objet-image incidente due à l'objectif;

2° la transmission photographique proprement dite due à l'émulsion et à son traitement.

Si l'on connaît la transmission globale et la transmission photographique, on peut en déduire la transmission optique due à l'objectif. Dans un travail antérieur, j'ai étudié la transmission photographique en prenant des photographies par contact [1]. Pour appliquer une méthode analogue au cas où la photographie est prise avec un objectif, il me fallait une mire lignée de grandes dimensions, dont l'objectif donne une image incidente réduite.

J'ai réalisé la mire en tendant des ressorts d'horlogerie à intervalles réguliers. La Maison Augé m'a

fourni 250 m de ressorts en acier bleui de 6 mm de large, dont le bord est rectifié au micron, d'épaisseur 0,18 mm. Ils ont été découpés en segments de 75 cm, qui sont recourbés à une extrémité, percés d'un petit trou à l'autre.

Des cornières en duralumin de 4 m de long sont assemblées comme l'indique le schéma ci-contre [cornières (1), (2), (3)]. Il y a deux assemblages identiques. En A l'aile de la cornière (1) est découpée en créneaux. La période des créneaux est 12,5 mm, le creux a 6 mm de large, 2 mm de profondeur. Les créneaux ont été exécutés à la fraiseuse avec une précision de 1/50e de millimètre. Les deux assemblages de cornières sont placés parallèlement et maintenus de loin en loin par des entretoises constituées par des tiges filetées. Des glaces G de 5 mm d'épaisseur, posées côte à côte sur les cornières (2) (*voir* schéma), fixent l'écartement des deux assemblages; leur longueur totale est 350 cm. Une mince bande de néoprène évite le contact verre-métal.

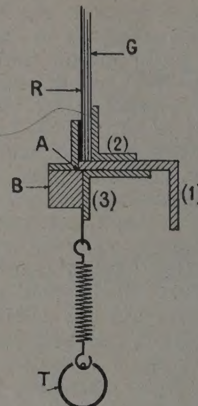
Un des assemblages porte latéralement un tube de chauffage central T de 27 mm (diamètre extérieur). Sur ce tube, des échancrures ont été pratiquées tous les 12,5 mm pour permettre d'accrocher des ressorts à boudin à une tige d'acier intérieure au tube.

Les ressorts d'horlogerie R sont posés sur les glaces et pénètrent dans les creux des créneaux en vis-à-vis. Les extrémités recourbées sont accrochées à l'aile libre de la cornière (3) sur l'assemblage non représenté. Les extrémités perforées sont fixées aux ressorts à boudin qui exercent une traction. Une règle de hêtre B boulonnée sur la cornière (3) de chaque assemblage bloque les ressorts.

Une petite cornière fixée sur chaque règle maintient les glaces avec l'intermédiaire d'une bande épaisse de néoprène. La largeur découverte des glaces est 58,5 mm.

La mire est suspendue à une voûte au moyen d'un câble passé sur des poulies.

En arrière, à 80 cm, est disposé un écran d'isorel



peint en blanc mat. Deux rampes de lampes installées sur les ailes libres des cornières (1) éclairent uniformément l'écran.

On a ainsi une mire lignée, périodique, de 350 sur 58,5 cm, très régulière et pratiquement indéformable.

Manuscrit reçu le 10 juin 1955.

[1] *Cahiers de Physique*, septembre 1952.

REVUE DES LIVRES

DAUVILLIER (A.), **Les rayons cosmiques dans leurs rapports avec l'électricité atmosphérique, la météorologie, le géomagnétisme et l'astronomie** (2 vol. 15,5 × 24 cm, XII + 565 pages, Dunod, Paris, 1954, 1750 et 2 600 f).

Cet Ouvrage n'est pas consacré à l'étude des particules de grande énergie pour elles-mêmes mais à celle des divers phénomènes naturels, terrestres et astronomiques les impliquant. Il comporte une nomenclature des particules connues à ce jour à l'exclusion de tout développement théorique sur leur existence et leur stabilité. Par contre, il contient d'abondants développements sur leurs manifestations expérimentales et sur les techniques d'observation. Environ 150 pages sont consacrées à l'étude des chambres d'ionisation (à pression constante et avec détente), des compteurs de *Geiger-Müller* et de la méthode photographique. L'absorption des rayons cosmiques par la matière fournit ensuite le complément indispensable pour aborder l'étude descriptive du rayonnement cosmique en fonction des divers paramètres géophysiques et du temps. L'étude des effets géomagnétiques sur la distribution géographique et angulaire du rayonnement cosmique est suivie par un chapitre sur la nature du rayonnement cosmique. L'auteur donne un schéma montrant la généalogie des différents événements nucléaires en fonction de l'altitude à partir du rayonnement primaire arrivant dans la haute atmosphère jusqu'au niveau du sol et même à l'intérieur des océans.

Le bilan énergétique du rayonnement cosmique et l'étude de quelques effets particuliers comme l'effet *Cerenkov* et la production de mutations complètent l'inventaire des multiples phénomènes liés à ce rayonnement.

Un chapitre important est ensuite consacré aux variations du rayonnement cosmique. Ces variations sont de deux types Les unes sont directement liées à l'état de l'atmosphère et dépendent de la pression barométrique et de la température Les autres sont des fluctuations dans le temps, périodiques (diurne, semi-diurne, annuelle, séculaire) et non périodiques comme celles d'origine solaire ou météorologique.

Le dernier chapitre est consacré à des considérations sur l'origine des rayons cosmiques et l'évolution de l'univers.

R. CAYREL.

Le Gérant : MAURICE BLONDIN. 148322 IMP. GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins, Paris. — 1955.